

# ÇOK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLERİN LİNEER OLMAYAN TİTREŞİMİ: GENELLEŞTİRİLMİŞ DİFERANSİYEL QUADRATURE YAKLAŞIMI

Ömer CİVALEK \*,  
Hikmet Hüseyin ÇATAL \*\*

*Genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodu çok serbestlik dereceli sistemlerin lineer olmayan serbest ve zorlanmış titreşim analizine uygulanmıştır. Çok serbestlik dereceli sisteme ait hareket denklemi diferansiyel quadrature metodu ile, çözüm bölgesindeki düğüm noktalarında bilinmeyen fonksiyon değerleri olarak tanımlanmış bir lineer denklem takımına indirgenmiştir. Sistem dinamik yanıtı olarak; deplasmanlar hesaplanmıştır. Bulunan sonuçlar yapı dinamiği açısından yeter doğruluğa ve hassasiyete sahiptir.*

**Anahtar sözcükler :** Çok serbestlik dereceli sistem, lineer olmayan titreşim, genelleştirilmiş diferansiyel quadrature

*Generalized differential quadrature method is applied to the nonlinear free and forced vibration analysis of the multi degree of freedom systems. The equation of motion of the multi degree of freedom system is reduced to a linear algebraic equation in terms of the unknown function values at the grid points in the field domain via differential quadrature method. Displacements are found as the dynamic response of the system. It is found that the obtained results are accurate and efficient in point view of the structural dynamic disciplines.*

**Keywords :** Multi degree of freedom system, nonlinear vibration, generalized differential quadrature.

\* Yrd. Doç.Dr., Akdeniz Üniversitesi, İnşaat Müh. Böl., Mekanik Ana Bilim Dalı  
\* Dokuz Eylül Üniversitesi, İnşaat Müh. Böl.,

## GİRİŞ

Ülkemizde son 10 yılda meydana gelen şiddetli depremler; deprem mühendisliği ve dolayısıyla yapı dinamiği disiplininin önemini bir daha vurgulamıştır. Bir başka ifadeyle bilginin ne kadar pahalı olduğu ve bunun ihmali durumunda ise bize ne kadar pahalıya patlayacağını çok iyi vurgulamıştır. Çağdaş deprem mühendisliği; standartlarda sınırları belirtilen küçük veya orta şiddetli depremlerde yapıların elastik, daha yüksek şiddetli depremlerde ise elasto-plastik sınırlar içinde deformasyonlar yapmasını öngörür [1]. Yani, orta şiddetli büyüklükte kabul edilecek bir deprem için herhangi bir ekonomik kayba neden olmadan veya hasar oluşmayacak şekilde yapının yanıt vermesi, bundan daha büyük depremlerde ise yapıda geçici veya kalıcı çeşitli deformasyonlar oluşsa da yapı elemanlarının gevrek ve ani kırılmalar yapmaması veya tamamıyla mekanizme durumuna geçmemesi istenir. Bu amaçlara ulaşmak; yapının tasarlanması, analizi ve gerçekleştirilmesi süresince pek çok faktöre bağlıdır. Ancak, yapı sistemlerinin analizi kapsamında her zaman; daha hassas sonuçlara daha az bilgisayar ihtiyacı ve daha kısa zaman kullanarak ulaşmak esastır. Yani elde edilecek çözümün ekonomik olması istenir. Fiziksel bir sistemin matematik modelinin elde edilmesi, mühendislik uygulamalarındaki ilk aşamadır. Bu denklem; sistemin sürekli ve ayrık kabul çözümüne göre, kısmi veya adi türevli bir diferansiyel, bir integral veya nadir olarak bir lineer denklem sistemi elde edilir. Gerek mühendisliğin; akışkanlar ve katı cisimler mekaniği, sürekli ortamlar mekaniği gibi uygulamalı alanlarında ve gerekse temel bilimlerde karşılaşılan denklemler genelde lineer ya da nonlineer türde bir kısmi diferansiyel denklem olmakta ve problem neticede bir sınır değer veya başlangıç değer probleminin çözümüne indirgenmektedir [2,3]. Daha az düğüm noktası kullanarak daha kısa sürede sonuca ulaşma çabaları neticesinde diferansiyel quadrature metodu önerilmiştir. Metot; ağırlık katsayılarının hesaplanmasındaki güçlüklerin giderilmesi ve kullanılan yaklaşım fonksiyonlarının bulunmasından sonra yaygınlaşmış ve ancak 1987 yılından sonra yapı mekaniği ve akışkanlar mekaniği problemlerine başarıyla uygulanmıştır [4, 5, 6, 7, 8]. Günümüze kadar son on yıl içinde plak, kabuk ve kirişlerin statik, dinamik ve stabilite hesabında başarıyla kullanılmış olup, diferansiyel quadrature

elemanlar metodu, 1992 yılında geliştirilmiş diferansiyel quadrature (GDQ) ve 1995 yılında harmonik diferansiyel quadrature(HDQ) metodu gibi üç farklı versiyonu önerilmiş olup ağırlık katsayılarının hesaplanması ve seçilen polinom fonksiyonu açısından orijinal diferansiyel quadrature'dan farklılık gösterir[9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]. Bu çalışmanın amacı çok serbestlik dereceli (ÇSD) olarak modellenen fiziksel sistemlerin dinamik analizini idare eden matematik modellerinin uygun başlangıç koşulları ile birlikte geliştirilmiş diferansiyel quadrature metodu ile çözmektir.

## DİFERANSİYEL QUADRATUR (DQ) METODU

Diferansiyel quadrature metodu; bir fonksiyonun verilen bir ayrık noktadaki bir uzay değişkenine göre kısmi türevi, o değişken bölgesinin bütün ayrık noktalarındaki fonksiyon değerlerinin ağırlıklı bir lineer toplamı ile ifade edilir, şeklinde tanımlanan düşünceye dayanır. Yeter yaklaşıktaki sonuçlar elde etmek için daha az sayıda grid kullanan diferansiyel quadrature metodu; fizik ve mühendislikte karşılaşılan başlangıç değer ve sınır değer problemleri için farklı bir yaklaşım ortaya koymuştur. Diferansiyel quadrature metodunun uygulanması sırasında ortaya çıkan en önemli kavram ağırlık katsayılarının hesabıdır. Bu amaçla test fonksiyonu olarak çeşitli tipte polinomlar ve fonksiyonlar önerilmiştir. Spektral yöntemlere benzer olarak çeşitli tipteki orthogonal polinomların (Chebyshev, Lagrange, Legendre vb.) kullanıldığı Geliştirilmiş Diferansiyel Quadrature (GDQ), kuvvet fonksiyonlarının kullanıldığı orijinal Diferansiyel Quadrature (DQ) veya son zamanlarda yapılan bazı çalışmalarda gördüğümüz harmonik fonksiyonların kullanılmasını öneren Harmonik Diferansiyel Quadrature (HDQ) metodları literatürde bilinen ve kullanılan yöntemlerdir. Kuvvet polinomlarının kullanılması ile tek boyutlu bir  $\psi(x)$  fonksiyonun birinci türevini  $x_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) noktalarında  $N$  ayrık nokta için göz önüne alırsak  $i$ .nci ayrık nokta için birinci türev

$$\Psi_x(x_i) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N a_{ij} \Psi(x_j); \quad i=1,2,\dots,N \quad (1)$$

olacaktır. Burada  $x_j$  değişken bölgesindeki ayrık noktaları,  $\Psi(x_i)$  bu noktalardaki fonksiyon değerlerini, ve  $a_{ij}$  birinci dereceden türev için bu değerleri fonksiyon değerlerine bağlayan ağırlık katsayılarını ifade eder. Kuvvet polinomları kullanımında (1) denklemi tam olarak alındığında, test fonksiyonu olarak  $(N-1)$  veya daha küçük dereceden seçilen polinom fonksiyonu için;

$$\Psi_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1,2,\dots,N \quad (2)$$

verilen denklem (1)'de yerine yazılırsa aşağıda belirtildiği formda bir lineer denklem takımı verir.

$$(k-1)x_i^{k-2} = \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j^{k-1} \quad (3)$$

$i = 1,2,\dots,N$  ve  $k = 1,2,\dots,N$  için

Benzer işlemler iki ve daha fazla dereceden türev ifadeleri için de yazılabilir. Böylece, her bir dereceden türev için ağırlık ifadeleri birinci dereceden türev ifadesinden farklı olmaktadır. İkinci dereceden türev için metot

$$\Psi_{xx}(x_i) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N b_{ij} \Psi(x_j); \quad i = 1,2,\dots,N \quad (4)$$

olarak verilir. Burada  $b_{ij}$  ikinci dereceden türev için ağırlık katsayısıdır. Denklem (4) birinci dereceden ağırlık katsayıları cinsinden

$$\Psi_{xx}(x_i) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{jk} \Psi(x_k); \quad i = 1,2,\dots,N \quad (5)$$

olarak yazılır. Denklem (2) ile verilen polinom fonksiyon uygulanırsa ikinci dereceden türev ifadesi

$$(k-1)(k-2)x_i^{k-3} = \sum_{j=1}^N B_{ij} x_j^{k-1} \quad (6)$$

olmaktadır. Bu denklem yukarıda verilen (3) denklemine benzer yaklaşımla çözülür. Eğer spesifik yani özel olarak hesap yapılmak istenen bir nokta var ise bu noktaya göre düzenlenmiş eşit olmayan aralıklı grid nokta seçimi de benzer olarak yapılır.

## GENELLEŞTİRİLMİŞ DİFERANSİYEL QUADRATURE (GDO)

İlk önerilen diferansiyel quadrature yaklaşımında ağırlık katsayılarının hesaplanmasında çeşitli güçlükler ortaya çıkmaktadır. Birinci yöntemde elde edilen denklemin katsayılar matrisi Vandermonde sistemi olduğundan determinantının hesabında güçlük çıkar ve denklemin çözümü tekindir. Özellikle grid sayısı arttıkça sonuçların hassasiyeti azalabilmektedir. N grid sayısı 20 den büyük olduğu durumlarda sonuçların güvenilirliği azalmaktadır. Bunlara ilaveten, her bir işlem adımında  $N \times N$  denklem takımını çözmeye zorunluluğu vardır. İkinci yaklaşımda ise farklı sınır şartları ve geometri için metodun uygulanabilirliği azalmaktadır. Yani; gerek, daha az sayıda grid noktası seçilerek her işlem adımında bir lineer denklem takımı çözmeyi gerektiren birinci yöntemde gerekse de düğüm noktalarının dağılımını kısıtlayan Legendre yaklaşımında metodun uygulanabilirliği açısından çeşitli güçlükler vardır. Dolayısıyla; hem bu güçlükleri gidermek açısından hem de metodun kullanım alanı ve uygulanabilirliğini kolaylaştırmaya yönelik çabalar sonucunda iki ayrı grup tarafından bağımsız olarak metod geliştirilerek ağırlık katsayılarının hesabı farklı grid noktaları ve yüksek dereceden türevler için uygun bir formda elde edilebilmiş ve genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodu ortaya çıkmıştır. Shu ve Richards [5] ağırlık katsayıları için herhangi bir tekilliğe neden olmayan ve büyük sayıda lineer denklem takımını çözümü gerektirmeyen analitik ifadeler önermişlerdir. Bu metotta birinci ve ikinci dereceden türevler için;

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j)M^{(1)}(x_j)}; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_x, j \neq i \quad (7)$$

$$B_{ij}^{(1)} = \frac{P^{(1)}(y_i)}{(y_i - y_j)P^{(1)}(y_j)}; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_y, j \neq i \quad (8)$$

Burada

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^{N_x} (x_i - x_j), \quad P^{(1)}(y_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^{N_y} (y_i - y_j) \quad (9,10)$$

$$A_{ij}^{(r)} = r \left[ A_{ii}^{(r-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(r-1)}}{x_i - x_j} \right];$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N_x, j \neq i; \quad \text{ve } r = 2, 3, \dots, N_x - 1 \quad (11)$$

$$B_{ij}^{(s)} = s \left[ B_{ii}^{(s-1)} B_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(s-1)}}{y_i - y_j} \right]; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_y,$$

$$j \neq i; \quad \text{ve } s = 2, 3, \dots, N_y - 1 \quad \text{için} \quad (12)$$

$$A_{ii}^{(r)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_x} A_{ij}^{(r)}; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad \text{ve}$$

$$r = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (13)$$

$$B_{ii}^{(s)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_y} B_{ij}^{(s)}; \quad i = 1, 2, \dots, N_y \quad \text{ve } r = 1, 2, \dots, N_y - 1 \quad (14)$$

Üniform grid noktaları için denklem (7) ve (8) ile verilen aşağıdaki forma indirgenir.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{(i-1)(N-i)}{\Delta x (i-j)(j-1)(N-j)}; \quad i, j = 1, 2, \dots, N, j \neq i \quad (15)$$

$$B_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{(i-1)(M-i)}{\Delta y (i-j)(j-1)(M-j)}; \quad i, j = 1, 2, \dots, M, j \neq i \quad (16)$$

Burada  $\Delta x = x_i - x_{i-1}$  ve  $\Delta y = y_i - y_{i-1}$ . Bütün grid noktalarındaki fonksiyon değerleri hesaplanınca herhangi bir noktadaki türev yaklaşımları

$$\Psi(x, y_j) = \sum_{i=1}^{N_x} \Psi(x_i, y_j) \alpha_i(x) \quad (17)$$

$$\Psi(x_i, y) = \sum_{j=1}^{N_y} \Psi(x_i, y_j) \beta_j(y) \quad (18)$$

$$\Psi(x, y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \Psi(x_i, y_j) \alpha_i(x) \beta_j(y) \quad (19)$$

Burada  $\alpha_i(x)$  ve  $\beta_j(y)$  değerleri sırasıyla x ve y doğrultularındaki Lagranj enterpolasyon polinom fonksiyonlarıdır. Diferansiyel quadrature metodunda

çözümün hassasiyeti bazı problem türlerinde sınır koşullarına bağlı olsa da (sınır değer problemlerinde) genelde bu hassasiyet düğüm (grid) noktalarının seçimine ve sayısına bağlıdır. Düğüm noktaları sonlu farklar metodunda teşkil edilen şebeke (network) seçimi, veya sonlu elemanlar metodunda seçilen sonlu eleman ağ tipi ile hemen hemen benzerdir. Bu benzerlik yapısal bir benzerlik olmayıp fiziksel sistemi temsil eden matematik model için çözümün bulunacağı temel noktalar bazındadır. Daha önce yapılan çalışmalarda gösterilmiştir ki; lineer türden denklemler ve homojen sınır koşullarına sahip problemlerde eşit aralıklı seçilen düğüm noktaları çözüm hassasiyeti açısından yeterlidir. Eşit aralıklı noktalar ile işlem kısmen kolay ve uygulaması daha basittir, ancak eşit olmayan nokta aralığı için az da olsa sonuçların hassaslığı azalır bazılarında artar [16,17]. Düğüm noktalarının seçiminde sıkça kullanılan bir yöntem her doğrultuda yani her bir koordinat yönünde (zamana bağlı problemlerde zaman ekseninde) eşit aralıklı seçilen grid dağılımı seçmektir. Bu tür grid [4,5]:

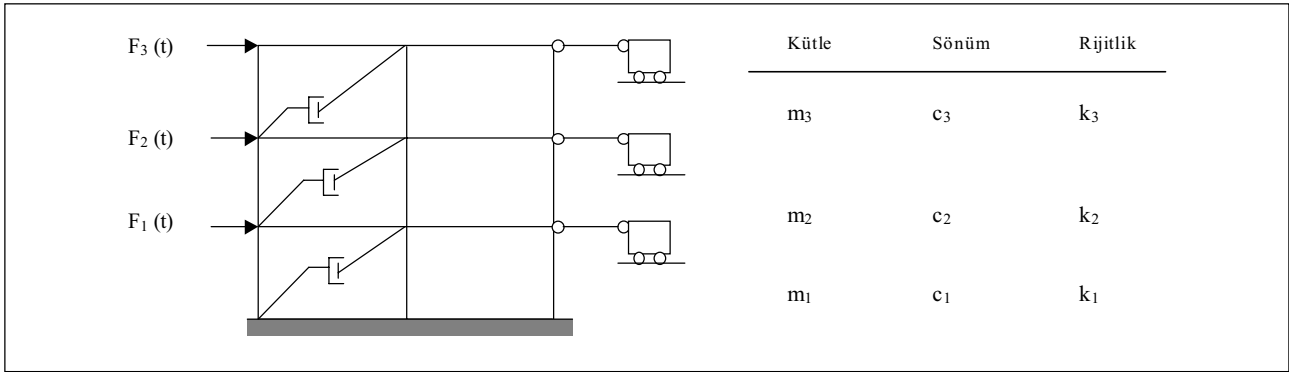
$$x_i = \frac{i-1}{N_x-1}; i = 1,2,\dots,N_x \quad (20)$$

olarak verilir.

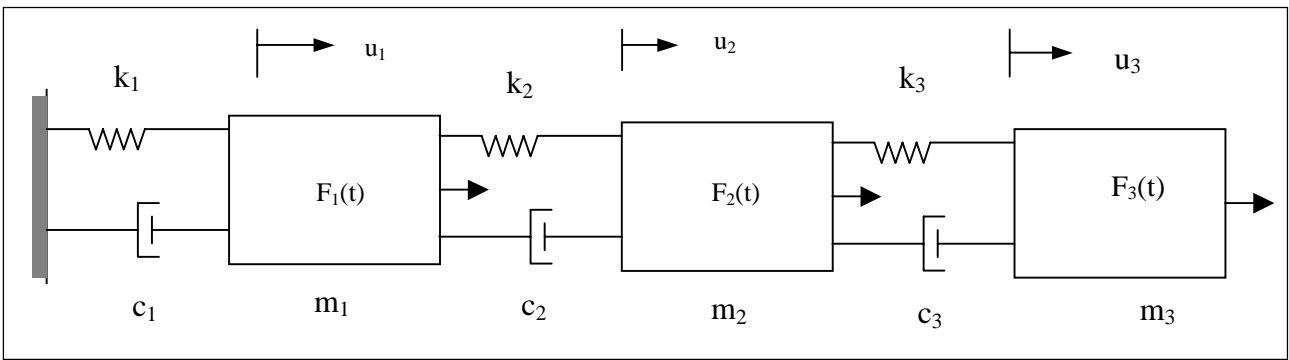
## ÇOK SERBESTLİK DERECELİ SİSTEMLER

Mühendislik yapılarının büyük bir çoğunluğu kullanım süreleri boyunca bir veya daha fazla dinamik yüklemeye maruz kalırlar. Yapıya etkiyen kuvvetler en genel manada; periyodik ve periyodik olmayan kuvvetler veya deterministik ve keyfi (random) kuvvetler olarak dört farklı gruba sınıflandırılabilir. Yapıların serbest veya zorlanmış titreşim etkileri altında dinamik analizi, deprem mühendisliği ve yapı dinamiği disiplininin temel kavramlarından biridir. Depreme dayanıklı yapı tasarımı; titreşim frekansları, mod ve karşı gelen mukabele spektrumları gibi parametreler ile ilgilenir. Dinamik yükler etkisindeki yapıların analizi ve dizaynı zamana

bağlı değişen kuvvetlerin dikkate alınmasını gerektirir. Kuvvetler zamana bağlı olup, yapının karakteristikleri ve davranışı önemlidir. Rüzgar, deprem, darbe, patlama kuvvetleri, endüstriyel yapılarda makina ve motorların oluşturduğu titreşim kuvvetleri, fabrika krenlerinde oluşan titreşimlerin yapıya etkileri veya uçak-uzay sanayinde kullanılan gövde ve kanat gibi elemanların maruz olduğu aero-dinamik yüklerin oluşturduğu etkiler örnek olarak verilebilir. Etkiyen kuvvetlerin sabit bir değeri yoktur. Yani yükler zamanın bir fonksiyonu şeklinde ifade edilirler. Böylece yapı kütlelerine etkiyen kuvvetlerde zamanla değişeceğinden yapının yanıtının değişmesine neden olacaktır. Statik çözümlemede tek bir sonuç olduğu halde, dinamik analiz neticesinde elde edilen çözüm zamana bağlı bir fonksiyon şeklinde olup, bir çözüm kümesi şeklindedir. Bu çözüm kümesinin veya fonksiyonun ekstrem değerleri çözüm olarak alınır. Bunlardan başka ve en önemlisi, statik çözümlemede yer değiştirmelere karşılık dinamik analizde atalet kuvvetleri oluşur. Sonsuz serbestlik dereceli sistemlerinin çözümünde çeşitli matematik güçlükler ortaya çıkmakta buna karşın süresiz ortam problemlerinin çözümünde gerekli olan hesaplayıcı kapasitesi ve hesap süresi artmaktadır. Tek serbestlik dereceli bir sistemde kütlelerin tek bir noktada toplandığı kabulü matematik modelleme yapılabilmektedir. Çoğu mühendislik sisteminde bu yaklaşım mühendislik analizi açısından yeter hassasiyette sayısal sonuçlar verir. Bazı durumlarda, örneğin bir kesme çerçevesinde veya deprem etkisindeki bir yapıda her kata gelen kuvvetlerin, her katın rölatif deplasmanları veya titreşim frekanslarının bulunması gerekebilir. Bu gibi durumlarda sistem uygun bir şekilde ve yeter sayıda ayrık sisteme ayrılarak analiz yoluna gidilir. Böylece, sistemin hareketi sadece bir tek koordinat doğrultusu ile ifade edilemez. Sonuç olarak sistem; kütle, sönüm, rijitlik terimleri açısından deplasman sayısı dikkate alınarak matris formda yazılır. Bu amaçla Şekil 1'de görülen çerçeveyi dikkate alalım.



Şekil 1. (a) Çok Serbestlik Dereceli Örnek Bir Sistem



Şekil 1. (b) Kütle-Yay-Sönüm Elemanı Olarak Matematik Model

Her bir kütle için hareketin denge denkleminde

$$m_1 \ddot{u}_1 + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 - c_2 \dot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 = F_1(t)$$

$$m_2 \ddot{u}_2 - c_2 \dot{u}_1 + (c_2 + c_3) \dot{u}_2 - c_3 \dot{u}_3 - k_2 u_1 + (k_2 + k_3) u_2 - k_3 u_3 = F_2(t)$$

$$m_3 \ddot{u}_3 - c_3 \dot{u}_2 + c_3 \dot{u}_3 - k_3 u_2 + k_3 u_3 = F_3(t)$$

elde edilir. Bu denklemler kapalı matris formda

$$[M_{ij}] \{\ddot{U}_j\} + [C_{ij}] \{\dot{U}_j\} + [K_{ij}] \{U_j\} = \{F(t)_i\} \quad (21)$$

olarak yazılır. Burada kütle, sönüm ve rijitlik matrisleri;

$$[M_{ij}] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, [C_{ij}] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlar. Ayrıca deplasman, hız, ivme ve kuvvet vektörleri sırasıyla

$$\{U_{ij}\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}, \{\dot{U}_{ij}\} = \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{Bmatrix}, \{\ddot{U}_{ij}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \\ \ddot{U}_3 \end{Bmatrix}$$

$$\text{ve } \{F(t)_{ij}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

şeklinde verilir. Serbest titreşim durumunda hareket denklemini

$$[M] \frac{d^2 u}{dt^2} + [C] \frac{du}{dt} + [K] u = F(t) \quad (22)$$

olarak verilir. Bu denkleminde  $[M]$ , kütle,  $[C]$  sönüm ve  $[K]$  rijitlik matrislerini,  $u$  = deplasman vektörünü belirtir. Denklem  $\tau = t / \Delta t$  için boyutsuzlaştırılarak tekrar düzenlenirse

$$[M] \frac{1}{(\Delta t)^2} \frac{du^2}{d\tau^2} + [C] \frac{1}{\Delta t} \frac{du}{d\tau} + [K]u = F(\tau\Delta t) \quad (23)$$

ifadesi elde edilir. Burada  $t \in [0, \Delta t]$ . Diferansiyel quadrature formunda denklem [23];

$$[M] \frac{1}{(\Delta t)^2} \sum_{j=1}^N B_{ij}u_j + [C] \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^N A_{ij}u_j + [K]u_j = F(\tau\Delta t) \quad (24)$$

olarak yazılır. Denklemden  $A_{ij}$  ve  $B_{ij}$  ifadeleri bir önceki bölümde hesaplanması verilen diferansiyel quadrature yöntemi için gerekli birinci ve ikinci mertebeden ağırlık katsayılarıdır. Böylece her bir zaman adımı için bilinmeyen deplasmanlar hesaplanır.

### Lineer Olmayan Dinamik Analiz

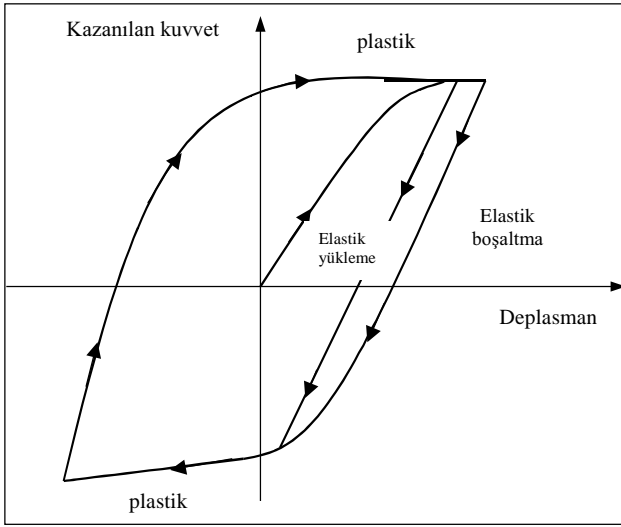
Herhangi bir sistemde, malzemenin yük-deformasyon eğrisi tek değerli ve daha önce oluşan hareketten etkilenmiyorsa esnek davranış, tersi duruma ise esnek olmayan davranış denilir. Bununla birlikte yapının esnek olması aynı zamanda yapının doğrusal davranmasını gerektirmez. Esneklik sınırları üzerinde deformasyona uğrayan birçok yapı elemanı doğrusal olmayan davranış gösterebilir ve iç sürtünmeler, plastik kaymalar nedeni ile sahip olduğu mekanik enerjinin bir kısmını kaybeder. Bu olaya histeresis, bu gibi elemanlardan oluşan esnek olmayan sistemlere ise histeretik sistemler denir. Betonarme ve çelik yapı elemanlarının çoğunda deformasyonlar belirli bir değeri aşınca doğrusal olmayan histeretik davranış oluşur. Dinamik sistemlerin lineer analizinde; yay eleman ile kazanılan yük, deplasman ile, viskoz sönümleme mekanizması vasıtasıyla sönümlenen enerjinin, hız ile orantılı olduğu kabul edilmiş idi. Bu modelde kütle zaman ile değişmez özelliktedir. Böylece sistemin hareket denklemi ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer bir diferansiyel denklem olur. Bununla birlikte; yapının dinamik karakteristiklerinin lineer durumda olduğu gibi hemen ifade edilmesi mümkün olmayan bazı fiziksel durumlarda vardır. Böyle sistemlerin analizi; yay kuvvetinin deplasman veya sönüm kuvvetinin hız ile

orantılı olarak değişmediği bir model ile tanımlanır. Sonuç olarak hareket denklemi lineer olmayan bir denklem olur ve çözümü biraz daha karmaşık olup bazı sayısal işlemler ve yöntemler ile yapılır. Bu yöntemler arasında en fazla bilinen adım adım integrasyon veya iterasyon metotlarıdır. Bu yöntemler içinde bilinen ve en fazla kullanılanlar; matris iterasyonuna dayalı Stodola-Vianello, transfer matrisi olarak da bilinen Holzer, Rayleigh, Newmark- $\beta$ , Wilson- $\theta$ , Adams-Stormer metodu, Hilber- $\alpha$  metodu, merkezi farklar, sonlu elemanlar, Houbolt, sayısal integrasyona dayalı; trapez kuralı, sabit ivme ve ortalama ivme yöntemleri verilebilir. Lineer olmayan analizde sistemin rijitliği sabit olmaz. Bu durumda (24) denklemi

$$[M] \frac{1}{(\Delta t)^2} \sum_{j=1}^N B_{ij}u_j + [C] \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^N A_{ij}u_j + F(s)_j = F(\tau\Delta t) \quad (25)$$

olarak ifade edilir. Burada  $F(s)$  her bir adımda rijitlik değişimine bağlı olarak hesaplanacak lineer olmayan yay kuvvetidir. Hareketin lineer olmayan denkleminin mümkün bir çözümü için pek çok metot vardır. Bunlar arasında en etkili olan yöntem adım adım integrasyondur. Bu metotta, mukabele  $\Delta t$  gibi bir zaman artımıyla ve genellikle eşit aralıklı olarak elde edilir. Her bir aralık başında dinamik denge şartı kurulur. Sonra  $\Delta t$  zaman artımı için mukabele yaklaşık olarak elde edilir. Ancak bu işlem süresince  $k$  ve  $c$  değerlerinin  $\Delta t$  aralığı süresince sabit kaldığı kabul edilir. Bu katsayıların lineer değişmemesi nedeniyle her bir zaman artımının başında yeniden oluşturularak işleme devam edilir. Böylece mukabele, her bir zaman aralığı sonunda hesaplanan deplasman ve hız değerlerinin bir sonraki adım için başlangıç koşulu olarak alınması ile elde edilir. Rijitlik katsayısı ve sönüm katsayısı değerleri ilk adımda hesaplanır ve bir sonraki zaman artımına kadar sabit kaldığı kabul edilir. Böylece lineer olmayan bir sistem ardışık lineer sistemlerin davranışına indirgenir.

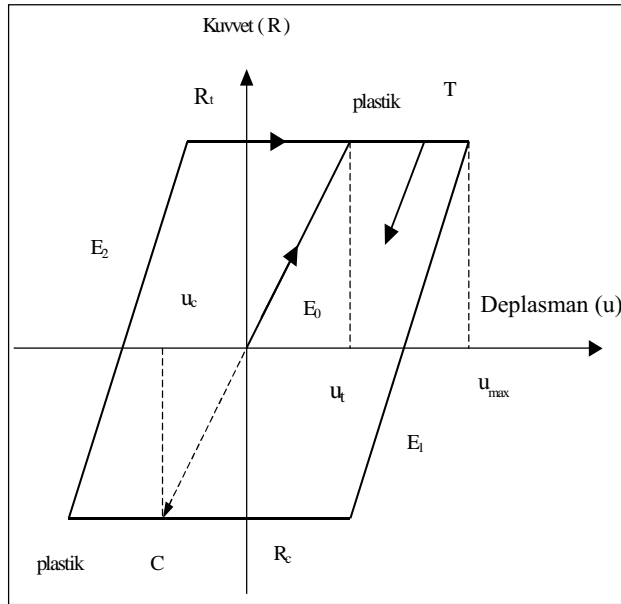
Herhangi bir yapı sistemde plastik akmaya yani plastik bölgede deformasyona müsaade edilirse tekrar kazanılan kuvvet Şekil 2' de gösterildiği gibi olur [19]. Bu eğride lineer elastik davranışın olduğu bir bölge ve daha büyük



Şekil 2. Gerçek Plastik Davranış

şekil değiştirmeler için plastik akma bölgesi oluşur. Yapı yüklenmediği zaman, ilave ters yüklemenin oluşturduğu basınç, plastik akma oluşuncaya kadar davranış tekrar elastik olur. Bu duruma karşı gelen kuvvet-deplasman eğrisi Şekil 3'de [19] verilmiştir. Bu şekilde  $R_t$  ve  $R_c$  çekme ve basınçdaki kuvveti,  $u_t$  ve  $u_c$  ise bunlara karşılık gelen deplasmanları gösterir [19].

Malzeme ve/veya geometrik bakımdan lineer olmayan bir sistemin davranışı eşdeğer bir doğrusal yani davranışı lineer olan sistemden şu bakımlardan farklıdır.



Şekil 3. Elasto-Plastik Yüklenme Boşaltma Diyagramı Modeli

Doğrusal olmayan bir sistem doğrusal sisteme göre daha yumuşaktır ve bu nedenle görünür frekansı daha düşüktür. Yine doğrusal olmayan sistemde histeresis varsa sistemin titreşim enerjisinin bir kısmını bu histeresis nedeniyle kaybeder.

## UYGULAMA

Örnek 1: Yukarıda anlatılan yöntemin yeterliliğini göstermek amacıyla üç serbestlik dereceli bir sistemin zorlanmış titreşimini dikkate alalım. Sisteme ait kütle, sönüm ve rijitlik matrisleri ile kütlelere etkiyen yük vektörü sırasıyla;

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; [C] = \begin{bmatrix} 1.26 & -0.60 & 0 \\ -0.60 & 1.26 & -0.66 \\ 0 & -0.66 & 0.66 \end{bmatrix};$$

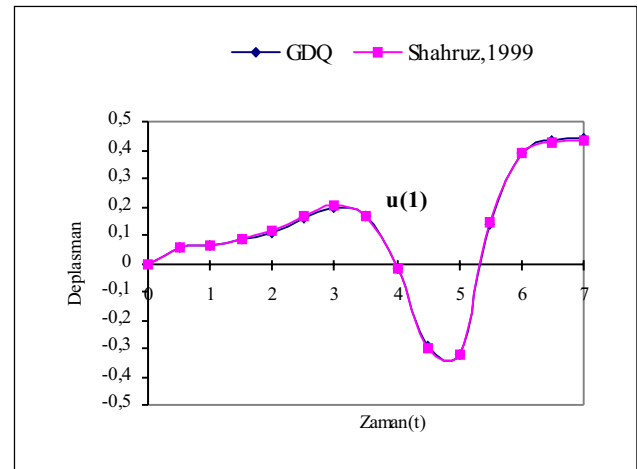
$$[K] = \begin{bmatrix} 20 & -10 & 0 \\ -10 & 20 & -10 \\ 0 & -10 & 10 \end{bmatrix} \{F(t)\} = \begin{Bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{Bmatrix} \sin \frac{9\pi}{20} t;$$

$$0 \leq t \leq 20 \text{ ve } \{F(t)\} = 0; t > 20$$

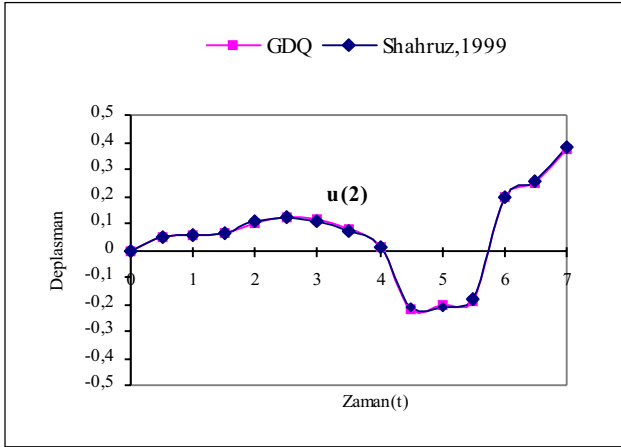
şeklinde tanımlıdır. Sisteme ait başlangıç koşulları

$$u_1(0) = u_2(0) = u_3(0) = 0 \text{ ve } \dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0) = \dot{u}_3(0) = 0$$

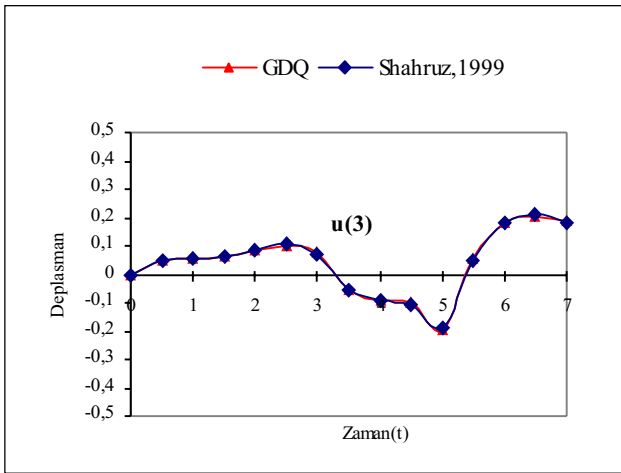
Çözüm neticesinde elde edilen deplasmanlar ilk 7 saniye ve her bir kütle için Şekil 4, 5 ve 6'da Shahruz



Şekil 4. Birinci Deplasman Doğrultusunda Elde Edilen Sonuçların Karşılaştırılması



Şekil 5. İkinci Deplasman Doğrultusunda Elde Edilen Sonuçların Karşılaştırılması



Şekil 6. Üçüncü Deplasman Doğrultusunda Elde Edilen Sonuçların Karşılaştırılması

ve Lords tarafından [18] verilen sonuçlar ile birlikte verilmiştir.

Örnek 2: Üç katlı ve tek açıklıklı çerçeveye her bir kat hizasında aşağıda verilen (Şekil 7) üçgen yükler etmektedir. Sistem parametreleri;  $k_1 = k_2 = k_3 = 1500$  Kg /cm ve kütleler sırasıyla  $m_1 = m_2 = m_3 = m = 0.3886$  Kg / sn<sup>2</sup> cm. Hesaplanan deplasman değerleri Şekil 8'de karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

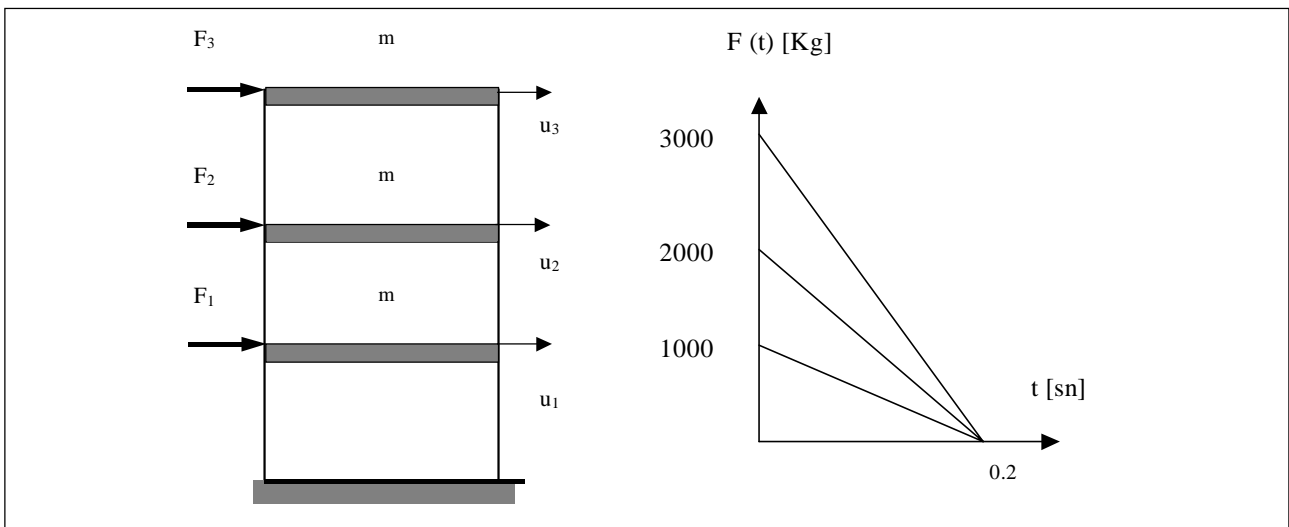
Örnek 3: Aşağıda verilen gergili sistemin gergilerine(halat) ait malzeme gerilme-şekil değiştirme bağıntısı nonlineerdir. Çerçeve geometri ve gergilerine ait gerilme-şekil değiştirme bağıntıları aşağıdadır. İşlemler  $\Delta t = 0.25$  ve  $0 \leq t \leq 3.0$  sn için yapılacaktır.

Sistem kütle, rijitlik ve sönüm matrisleri ile başlangıç koşulları aşağıda özetlenmiştir. Kütle matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

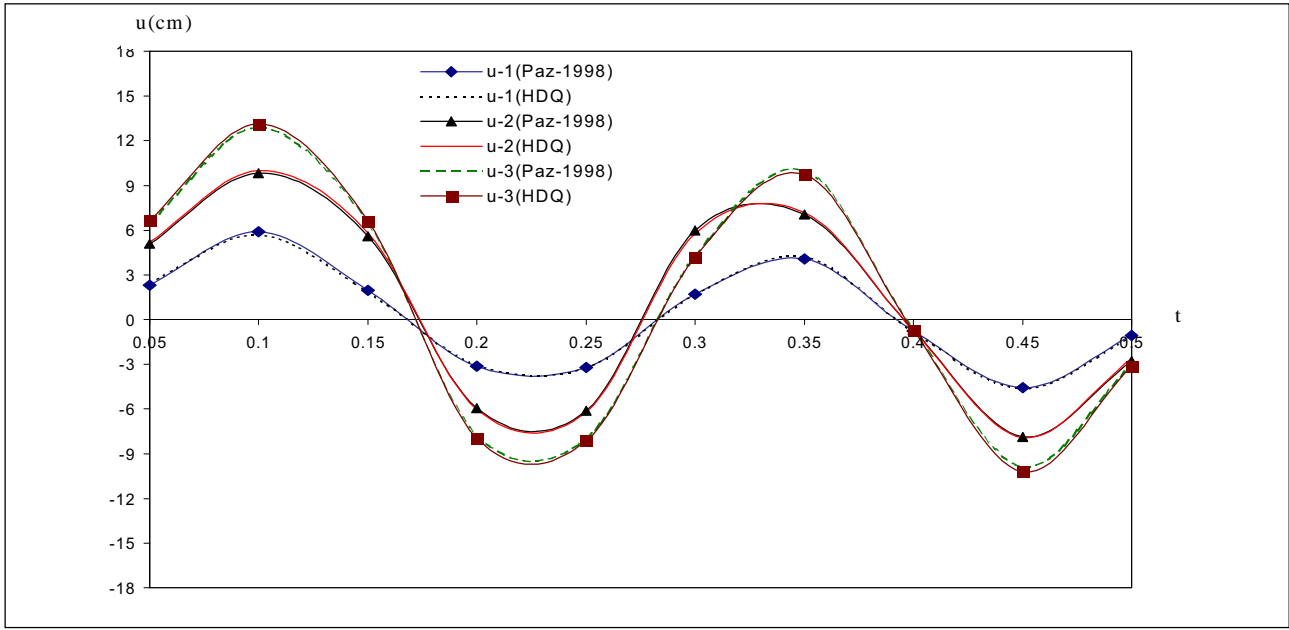
Başlangıç rijitlik matrisi

$$K = \begin{bmatrix} 2 \frac{AE}{L} \cos^2 \theta & -\frac{AE}{L} \cos^2 \theta \\ -\frac{AE}{L} \cos^2 \theta & \frac{AE}{L} \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}$$

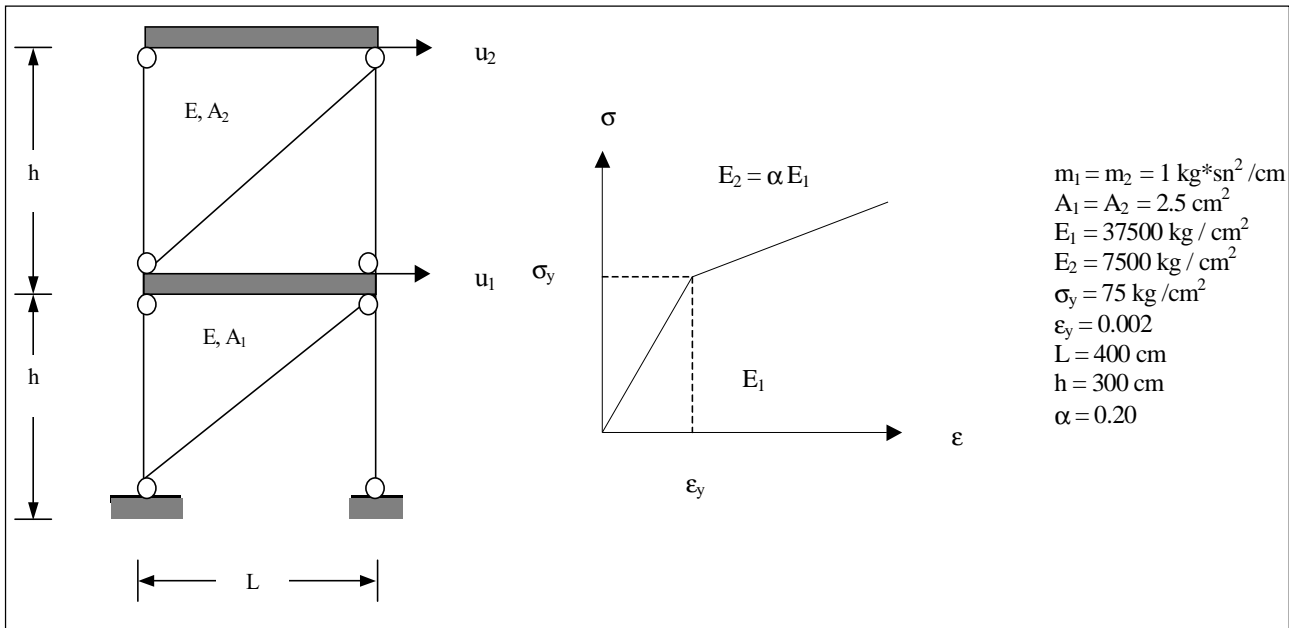


Şekil 7. Üç Katlı Çerçeve Sistem ve Etkiyen Yükler





Şekil 8. Üç Katlı-Tek Açıklıklı Kat Çerçevesinin Sönümsüz Zorlanmış Titreşim



Şekil 9. İki Katlı Gergili Çerçeve ve Nonlineer Gerilme-Şekil Değiştirme Eğrisi

Birinci bağlantıda (halatta) akma başlayınca  $K_1$

İkinci bağlantıda (halatta) akma başlayınca  $K_2$

$$K_1 = \begin{bmatrix} (1+\alpha)\frac{AE}{L}\cos^2\theta & -\frac{AE}{L}\cos^2\theta \\ -\frac{AE}{L}\cos^2\theta & \frac{AE}{L}\cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} (1+\alpha)\frac{AE}{L}\cos^2\theta & -\alpha\frac{AE}{L}\cos^2\theta \\ -\alpha\frac{AE}{L}\cos^2\theta & \alpha\frac{AE}{L}\cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix}$$

Her iki bağlantıda (halatta) akma başlayınca  $K_{12}$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} 2\alpha \frac{AE}{L} \cos^2\theta & -\alpha \frac{AE}{L} \cos^2\theta \\ -\alpha \frac{AE}{L} \cos^2\theta & \alpha \frac{AE}{L} \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & -20 \\ -20 & 20 \end{bmatrix}$$

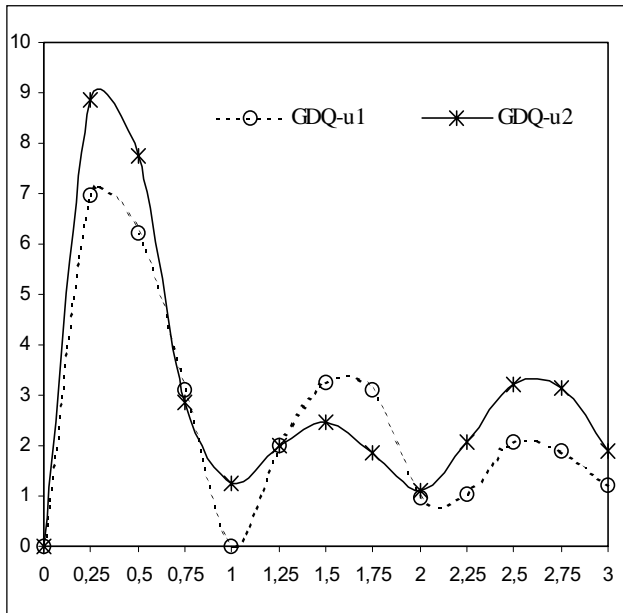
Sönüm matrisi

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Başlangıç koşulları

$$\begin{Bmatrix} u_{10}(0) \\ u_{20}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ ve } \begin{Bmatrix} \dot{u}_{10}(0) \\ \dot{u}_{20}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

olarak verilmiştir. Hesaplanan deplasman değerleri Şekil 10'da verilmiştir.



Şekil 10. İki Katlı Gergili Çerçevenin Sistemin Sönümlü Lineer Olmayan Serbest Titreşimi (1 ve 2.Kat Hızındaki Deplasmanları)

## SONUÇ

Çalışmada GDQ metodu çok serbestlik dereceli sistemlerin lineer ve lineer olmayan titreşim hesabına uygulanmıştır. GDQ metodu ağırlık katsayılarının hesabında herhangi bir teklik doğurmamakta ve daha az

düğüm nokta sayısı ile daha hassas sonuçlar vermektedir. DQ metodu ise daha doğru sonuçlar için daha fazla sayıda düğüm noktasına ihtiyaç duymakta, ancak daha çok düğüm sayısı kullanılıncaya hesap süresi artmaktadır. GDQ metodu ile ağırlık katsayılarının hesabı cebirik bir formülasyon ile yapılabilmektedir. Sonuçların yaklaşıklığı, gerektirdiği hesaplayıcı kapasitesi ve uygulama alanının çeşitliliği dikkate alınınca DQ metodlarının farklı geometri ve malzeme özelliklerine sahip yapıların dinamik hesabında kullanılacak etkili bir metot olacağı ve bu işlemlerin lineer olmayan analiz içinde geliştirilebileceği söylenebilir.

## TEŞEKKÜR

Yazarlar; uyarıları ve düzeltmeleriyle yazının mevcut durumuna gelmesinde büyük katkıları olan değerli Hakemlere teşekkür eder. Birinci yazar Akdeniz Üniversitesinin maddi katkıları için teşekkür eder.

## KAYNAKÇA

1. **Chopra, A.K.**, Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering, Prentice-Hall, New Jersey, 1995.
2. **Celia, M.A., Gray, W.G.**, Numerical Methods For Differential Equations, Fundamental Concepts For Scientific And Engineering Applications, Prentice Hall, New Jersey, 1992.
3. **Crandall, S.H.**, Engineering Analysis, A Survey of Numerical Procedures, McGraw-Hill, Book Company, New York, 1956.
4. **Du H, Lim MK, Lin, RM.** Application of Generalized Differential Quadrature Method to Structural Problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering 1994; 37:1881-1896.
5. **Shu C, Richards BE.** Application of Generalized Differential Quadrature to Solve Two- Dimensional Incompressible Navier-Stokes equations. International Journal for Numerical Methods in Fluids 1992;15:791-798.
6. **Civalek, Ö.**, Çok Serbestlik Dereceli Sistemlerin Harmonik Diferansiyel Quadrature (HDQ) Metodu ile Lineer ve Lineer Olmayan Dinamik Analizi, Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, 2003.
7. **Civalek, Ö.**, Application of Differential Quadrature (DQ) and

- Harmonic Differential Quadrature (HDQ) for Buckling Analysis of Thin Isotropic Plates and Elastic Columns, Engineering Structures, An International Journal, 26(2), 171-186,2004.
8. **Civalek, Ö., Ülker, M.**, Harmonic Differential Quadrature (HDQ) For Axisymmetric Bending Analysis Of Thin Isotropic Circular Plates, International Journal of Structural Engineering and Mechanics, Vol. 17(1), 1-14, 2004.
  9. **Civalek, Ö., Çatal, H.H.**, Plakların Diferansiyel Quadrature Metodu ile Stabilité ve Titreşim Analizi, IMO Teknik Dergi, 2003; Vol. 14 (1), 2835-2852.
  10. **Civalek, Ö., Çatal, H.H.**, Dikörtgen ve Kare Plakların Diferansiyel Quadrature Metodu ile Statik Hesabı., Dokuz Eylül Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi,2003(Baskıda).
  11. **Civalek, Ö., Çatal, H.H.**, Linear Static And Vibration Analysis Of Circular And Annular Plates By The Harmonic Differential Quadrature (HDQ) Method, Osmangazi Üniversitesi, Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi Dergisi,Vol.16(1),45-76, 2003.
  12. **Civalek, Ö.**, Diferansiyel Quadrature Metodu İle Elastik Çubukların Statik, Dinamik ve Burkulma Analizi, XVI Mühendislik Teknik Kongresi, Kasım, ODTU, Ankara, 2001.
  13. **Civalek, Ö., Çatal, H.H.**, Diferansiyel Quadrature Yöntemleriyle Yapıların Karşılaştırmalı Dinamik Analizi, Beşinci Ulusal Deprem Mühendisliği Konferansı, 26-30 Mayıs 2003, Bildiri no : AT-033, İ.T.Ü., İstanbul.
  14. **Civalek, Ö., Çatal, H.H.**, Bir ve İki Boyutlu Yapıların Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Yöntemiyle Dinamik Analizi, Türkiye İnşaat Mühendisleri Odası, Mühendislik Haberleri, Sayı 417, s.39-46,2002.
  15. **Civalek, Ö., Çatal, H.H.**, Stability and Vibration Analysis Of Plates By Differential Quadrature Method, Turkish Chamber of Civil Engineerings, Digest, 14, December, 2003.
  16. **Civalek, Ö.**, Three Different Type Differential Quadrature Methods (DQM) For Linear Buckling Analysis Of Uniform Elastic Columns, Technical Journal of Yıldız Technique University, 4,51-59, 2003.
  17. **Civalek, Ö.**, Diferansiyel Quadrature Metodları ve Mühendislik Alanındaki Uygulama Potansiyeli, Yapı Dünyası, Şubat, Sayı:95,37-42,2004.
  18. **Shahruz, S.M, Lords, T.R.C**, Upper Bounds on Responses of Linear Systems Under Transient Loads, J.of Sound and Vibration, 1999; 227(4), 886-894.
  19. **Paz, M.**, Structural dynamics, theory and computation, Champman & Hall,1997.

## ODA DERGİLERİ 2004 YILI ABONE FORMU

<b>Adı-Soyadı</b>	:	.....
<b>Meslek</b>	:	.....
<b>İşyeri Adı</b>	:	.....
<b>Adres ve Posta Kodu</b>	:	.....
<b>Telefon</b>	:	.....
<b>e-posta</b>	:	.....
<b>Kayıtlı Olduğunuz ODA</b>	:	.....
<b>Oda Sicil No</b>	:	.....

**İSTENİLEN DERGİ**

Dergi	Yıllık Abone Bedeli
<input type="checkbox"/> Mühendis ve Makina .....	30.000.000
<input type="checkbox"/> Endüstri Mühendisliği .....	15.000.000
<input type="checkbox"/> Tesisat Mühendisliği .....	18.000.000

Tek Dergi Bedelsiz  Mühendis ve Makina  Endüstri Mühendisliği  Tesisat Mühendisliği

**Ödenen Miktar** : .....

**Ödeme Şekli** : .....

**Gereğini bilgilerinize sunarım.** Tarih ..... / ..... / 2004 **İmza**

- 96954 No.lu Posta Çeki hesabına, fotokopisiyle beraber bir dilekçe
- İş Bankası Yenişehir/ANK. Şb. 4218 89872 Hs. Banka dekontu ile beraber bir dilekçe

