Endüstri Mühendisliği Dergisi
Cilt: 21 Sayı: 4 Sayfa: (2-12) Makina Mühendisleri Odası

ÇOK AMAÇLI SIRT ÇANTASI PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNE YENİ BİR YAKLAŞIM: KONİK SKALERLEŞTİRME

Aydın SİPAHİOĞLU, Tuğba SARAÇ*

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, Meşelik 26480, Eskişehir
asipahi@ogu.edu.tr, tsarac@ogu.edu.tr

Geliş Tarihi: 10 Kasım 2008; Kabul Ediliş Tarihi: 19 Mart 2010
Bu makale 1 kez düzeltilmek üzere 271 gün yazarlarda kalmıştır.

ÖZET

Sırt çantası problemi (*knapsack problem*-SÇP), Yöneylem Araştırması yazınında oldukça iyi bilinen kombinatorik problemlerden birisidir. Yazında birçok farklı tipi olan SÇP genellikle tek amaçlı olarak incelenmiştir. Ancak gerçek hayatta pek çok problem çok amaçlı yapıdadır. Sözgelimi kârın en büyük ve riskin en küçük olmasının istendiği yatırım probleminde olduğu gibi, birbiriyle çelişen iki ya da daha fazla amacın var olduğu durumlarda, problemi çok amaçlı olarak ele almak gerekmektedir. Çok amaçlı SÇP'nin matematiksel modelinde doğrusal amaç fonksiyonları ve doğrusal bir kısıt olmasına rağmen, 0-1 tamsayı değişkenlerin varlığı nedeniyle uygun çözüm alanı dışbükey değildir. Uygun çözüm alanının dışbükey olmadığı durumlarda Pareto etkin çözümlerin belirlenmesi ciddi bir sorun oluşturmaktadır. 2001 yılında Gasimov tarafından geliştirilen konik skalerleştirme yöntemi, dışbükeylik koşulu gerektirmemekte ve çok geniş bir problem sınıfına başarıyla uygulanabilmektedir. Bu çalışmada konik skalerleştirme yönteminin çok amaçlı sırt çantası probleminde başarıyla kullanılabileceği, klasik ağırlıklandırma yöntemiyle elde edilmesi mümkün olmayan içbükey Pareto etkin çözümlerin bu yöntemle rahatlıkla bulunabileceği, yazından alınan büyük boyutlu test problemleri üzerinde gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: 0-1 sırt çantası problemi, çok amaçlı karar verme, skalerleştirme, Pareto etkin çözümler

A NEW SOLUTION APPROACH FOR MULTI OBJECTIVE KNAPSACK PROBLEM: CONIC SCALARIZATION

ABSTRACT

Knapsack problem (KP) is one of the well-known combinatorial optimization problems in the operational research literature. Although there are many studies on the knapsack problem with different constraints and objectives in the literature, KP has been studied with single objective function, in general. However, most of the problems have multi objective structure, in real life. For instance, if there exist two or more objectives which conflict each others, like maximization of the profit and minimization of the risk in an investment problem, the 0-1 multi-objective knapsack problem occurs. Although the mathematical model of the knapsack problem has a linear constraint and a linear objective function, feasible region is not a convex set due to existing 0-1 integer variables. Determining the Pareto efficient solutions for the problems having non convex feasible region is a crucial problem. On the other hand, the conic scalarization, which was developed by Gasimov in 2001, can be applied successfully to the wide range of problem class since it does not require convexity condition. In this study, it is shown on test instances taken from the literature, that the conic scalarization approach can be successfully used for solving a large scale multi objective knapsack problem and the concave Pareto-efficient solutions which can not be found by using classical weighted method can be easily obtained by using conic scalarization approach.

Keywords: 0-1 knapsack problem, multi objective decision making, scalarization, Pareto-efficient solutions

* İletişim yazarı

1. GİRİŞ

Sırt çantası problemi (SÇP), Yöneylem Araştırması yazınında iyi bilinen tamsayılı programlama problemlerinden birisidir. Özellikle son yıllarda hem kuramsal hem de uygulamalı problemlerle çalışan araştırmacıların ilgi odağı olmuştur. Bu ilginin temeli üç önemli nedene dayanmaktadır (Martello ve Toth, 1990): (a) SÇP en basit tamsayılı model olarak kabul görmektedir, (b) birçok karmaşık problemin (örneğin kesme problemleri) alt problemi konumundadır, (c) gerçek yaşamda pek çok uygulama alanı bulunur. Bu nedenlerle tamsayılı programlama konularını ele alan kitapların pek çoğunda sırt çantası problemlerine yer verilmektedir. Ayrıca Martello ve Toth (1990) ile Kellerer vd. (2004) yalnızca sırt çantası problemlerini ve çözüm yöntemlerini konu alan kitaplar yazmışlardır. Sırt çantası problemleri ile ilgili ayrıntılı bilgilere bu kitaplardan erişilmesi mümkündür.

Sırt çantası problemi denildiğinde, genellikle aşağıda gösterimlenen 0-1 değişkenli sürüm akla gelir.

Dizin ve parametreler kümesi:

j : parça dizini

n : parça sayısı

w_j : j. parçanın birim ağırlığı

p_j : j. parçanın birim kârı

c : sığa (kapasite)

p_j, w_j ve c pozitif tamsayılar ve

$$\sum_{j=1}^{n} w_j > c \quad \text{ve } w_j \le c,\ j=1,\dots,n$$

olmak üzere,

Karar değişkenleri:

x_j : j.parça seçiliyorsa 1, seçilmiyorsa 0 değerini alacak şeklinde tanımlanır. Buna göre SÇP'nin matematiksel modeli şöyledir:

$$\text{(SÇP)} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le c$$

$$x_j \in \{0,1\} \quad j=1,\dots,n$$

kısıtları altında,

$$\text{enb } z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

Problemin amacı toplam ağırlıkları sığayı (c) aşmayacak ve en fazla kazancı sağlayacak parçalardan hangilerinin seçilmesi gerektiğini belirlemektir.

Bu tip problemlere örnek olarak yatırım problemleri verilebilir. Yatırım yapma kararının verileceği n farklı proje olsun. Her proje için yapılması gereken yatırımların maliyeti (w_j) ve ilgili yatırımın yapılması durumunda projeden elde edilmesi beklenen getiriler (p_j) olsun. Bu durumda eldeki para miktarını (c) aşmadan, kârı en büyüklemek için hangi projelere yatırım yapılması gerektiğinin (x_j) araştırılması problemi, tipik bir 0-1 SÇP problemidir.

Sırt çantası probleminde birbiriyle çelişen birden çok amacın eniyilenmesi söz konusu olduğunda çok amaçlı sırt çantası problemi (ÇASÇP) ortaya çıkar. Çok amaçlı sırt çantası probleminin matematiksel gösterimi önceki tanımlara ek olarak yeni eklentilerle aşağıda verilmiştir.

Dizin ve parametreler:

t : problemdeki amaç sayısı

p_{tj} : t. amaç fonksiyonunda j. parçanın kârı

olmak üzere model şöyledir:

$$\text{(ÇASÇP):} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le c$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad j=1,\dots,n$$

kısıtları altında,

$$\text{enb} \left[\sum_{j=1}^{n} p_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} p_{tj} x_j \right]$$

Gösterimin kısıtı SÇP modeliyle aynıdır. Farklı olarak *t* tane değişik amaç fonksiyonu vardır. Gerçek hayatta pek çok problem, çok amaçlı yapıdadır. Buna bağlı olarak SÇP'nin uygulama alanlarında sıklıkla birbiriyle çelişen birden çok amacın ortaya çıkması kaçınılmazdır. Sözgelimi, kârın en büyük ve riskin en küçük olması istendiğinde yatırım problemi, amaçların birbirleriyle çeliştiği, çok amaçlı SÇP'ye bir örnektir.

Çok amaçlı sırt çantası problemlerinin yatırım bütçelemesi, kargo yükleme ve kesme problemleri gibi birçok uygulama alanları vardır (Martello ve Toth, 1990). Son yıllarda, Kanada'nın batı kıyıları için deniz feneri yeri belirleme (Jenkins, 2002) ve bina yenileme projelerinde, yer alması gereken yenileme faaliyetlerinin belirlenmesi (Alanne, 2004) problemleri de çok amaçlı 0-1 sırt çantası problemi olarak ele alınmıştır.

Çok amaçlı SÇP'nin çözümünde kullanılan yöntemler iki ana başlıkta ele alınabilir. Bunlardan ilki problemin çok amaçlı yapısı nedeniyle kullanılmış olan çözüm yöntemleri ve ikincisi de genel amaçlı eniyileme yöntemleridir. Yazında çok amaçlı SÇP'nin çözümü için kullanılmış olan birçok yöntem mevcuttur. Çok amaçlı problemlerin çözümü için kullanılan yöntemlerden ilki amaç fonksiyonlarının önem sırasına sokularak sırayla ve tek tek ele alınması mantığına dayanan sözlüksel (lexicographic) vektör eniyileme yöntemidir (Klamroth ve Wiecek, 2001; Captivo vd., 2003). Bir diğeri, çok amaçlı SÇP problemlerinin çözümünde diğerlerine oranla daha çok kullanılmış olan ağırlıklandırma yöntemidir (Abboud vd., 1997; Teghem vd., 2000; Jenkins, 2002). Bu yöntemde, tüm amaç fonksiyonları önemlerine uygun birer ağırlık değeriyle çarpılarak toplanmakta ve tek bir amaç fonksiyonu elde edilmektedir. Abboud vd. (1997) bu ağırlıkları bulanık mantık yaklaşımıyla belirlemiştir. Yine bu başlık altında sayılabilecek, toplamsal fayda fonksiyonunu kullanan yöntemler (Alanne, 2004), epsilon kısıt yöntemi (Laumanns vd., 2006), amaç programlama yaklaşımları (Sakawa ve Kato, 2003) ve Tchebycheff skalerleştirme fonksiyonu temelli yöntemlerdir (Alves ve Almeida, 2007).

Genel amaçlı çözüm yöntemleri kesin çözüm yöntemleri ve sezgisel yöntemler olmak üzere iki gruba ayrılabilir. Kesin çözüm yöntemleri olarak sayabileceğimiz dinamik programlama yaklaşımı (Klamroth ve Wiecek, 2001; Shih, 2005; Bazgan vd., 2009) ve problemi en kısa yol problemine dönüştürerek, etiketleme algoritması (Captivo vd., 2003) gibi yöntemleri kullanan birkaç çalışma dışında çok amaçlı SÇP'nin çözümünde genellikle sezgisel yöntemlerin kullanıldığını söylemek yanlış olmaz. Evrimsel algoritmalar (Jaszkiewicz, 2004; Kumar ve Banerjee, 2006), tavlama benzetimi (Teghem vd., 2000), çok amaçlı problemleri çözmeye uygun bir yapıda olan ve popülasyon temelli bir arama yöntemi olan *dağınık arama* (scatter search) (Silva vd., 2006; Silva vd., 2007), paralel hesaplamaya benzeyen *DNA hesaplama* (DNA computing) (Henkel vd., 2007) ve probleme özel sayılabilecek sezgisel ve melez yöntemler (Cho ve Kim, 1997; Jenkins, 2002; Zhang ve Ong, 2004; Laumanns vd., 2006; Ahmed ve Elettreby, 2006; Fleszar ve Hindi, 2009) daha önce çok amaçlı SÇP'nin çözümünde kullanılmışlardır. Kesin çözüm yöntemleriyle; ancak küçük ve orta büyüklükteki örnek problemler çözülebilmiştir. Büyük boyutlu problemler ise ancak sezgisel yöntemler kullanılarak ele alınabilmişlerdir (Silva vd., 2006).

Yazında çok amaçlı problemleri çözmek için kullanılan klasik ağırlıklandırma yöntemi bilindiği gibi, içbükey Pareto etkin noktaların bulunabilmesine olanak tanımamaktadır. Hem dışbükey hem de içbükey Pareto etkin çözümleri bulmak için kullanılan yaygın yöntemlerden ikisi "Tchebycheff" ve "epsilon kısıt" yöntemleridir. Çok amaçlı sırt çantası problemi bu iki yöntemle daha önce ele alınmıştır; ama konik skalerleştirme henüz ele alınmamıştır. Konik skalerleştirmenin "Tchebycheff" yönteminden farkı kullanıcının, amaçların civarında yer almasını istediği bir referans noktasını tanımlayabilmesi, "epsilon kısıt" yönteminden farkı ise çözümün tek bir aşamada elde edilebilmesidir.

Bu çalışmada, çok amaçlı sırt çantası problemine daha önce bu tür problemlerin çözümünde kullanılmamış olan konik skalerleştirme uygulanmış ve problem GAMS paket programının çözücüleri kullanılarak çözülmüştür. Önerilen yöntemle 100 parçadan 750 parçaya kadar farklı boyutlardaki iki ve üç amaçlı test problemlerinin çözülebildiği gösterilmiştir.

Çalışmanın kalan kısmı şöyle yapılandırılmıştır. İkinci bölümde konik skalerleştirme yaklaşımı tanıtılmış ve çok amaçlı SÇP'ye nasıl uygulandığı tartışılmıştır. Üçüncü bölümde deneysel sonuçlar verilmiş, son bölümde ise sonuç ve öneriler tartışılmıştır.

2. ÇASÇP'NİN KONİK SKALERLEŞTİRME YÖNTEMİ KULLANILARAK SKALERLEŞTİRİLMESİ

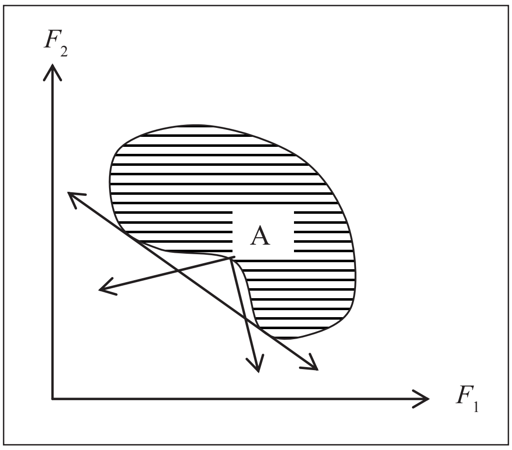
Skalerleştirme, birden fazla amaç fonksiyonunun hepsini temsil edebilecek tek bir fonksiyona dönüştürülmesidir. Yazında birçok skalerleştirme yöntemi mevcuttur (Luc, 1989; Chankong ve Haimes, 1983; Ehrgott, 2005). Gasimov (2001) tarafından önerilen yaklaşım: Kullanılışlığı, bir referans noktasına yakın çözümlerin araştırılmasına olanak tanıması, çok geniş bir problem sınıfına uygulanabilmesi ve en önemlisi de hiper düzlemlerle desteklenmesi mümkün olmayan noktaların desteklenmesine olanak tanımasıyla öne çıkmaktadır. Bu bölümde söz konusu yaklaşımın ÇASÇP'nin çözümünde nasıl kullanılabileceği açıklanmaktadır.

2.1 Konik Skalerleştirme Yöntemi

Klasik ağırlıklandırma yönteminde, her bir amaç fonksiyonu ($F_i(x)$) belirli bir ağırlık (we_i) değeriyle çarpılarak toplanır ve böylece problem tek amaçlı bir yapıya dönüştürülmüş olur. k amaçlı bir yapı için klasik ağırlıklandırma gösterimi aşağıda verilmiştir.

$$\underset{x\in X}{\text{enk}} \left[\sum_{i=1}^{k} we_i F_i \right] \qquad (1)$$

Ancak, klasik ağırlıklandırma yöntemiyle çözüm uzayında hiper düzlemlerle desteklenemeyen Pareto etkin çözümleri elde etmek mümkün değildir. Şekil 1'de iki amaçlı bir örnek problemin dışbükey olmayan görüntü kümesi yer almaktadır. Bu dışbükey olmayan kümedeki A noktasının bir doğru ile desteklenmesi mümkün değildir. Ama aynı nokta bir koni ile desteklenebilir.



Şekil 1. İki Amaçlı Örnek Bir Problem İçin Dışbükey Olmayan Görüntü Kümesi

Konik skalerleştirme yönteminde noktalar hiper düzlemlerle değil konilerle desteklendiğinden, klasik ağırlıklandırma ile bulunması mümkün olmayan Pareto etkin çözümlerin elde edilmesi mümkün olabilmektedir. Konik skalerleştirme yöntemi, dışbükeylik koşulu gerektirmediğinden çok geniş bir problem sınıfına başarıyla uygulanabilmektedir. Yöntemde farklı amaç fonksiyonlarının birleştirilmesinde dışbükey monoton fonksiyonlar kullanıldığından, eğer asıl problem doğrusal veya dışbükey ise dışbükeylik korunmaktadır (Gasimov, 2001).

Konik skalerleştirme gösterimi Gasimov (2001) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$\underset{x\in X}{\text{enk}} \left[\alpha \sum_{i=1}^{k} \left| F_i(x) - B_i \right| + \sum_{i=1}^{k} we_i (F_i(x) - B_i) \right] \qquad (2)$$

Burada α ve we_i kullanıcı tarafından belirlenmesi gereken parametrelerdir. Parametrelerin $0 \leq \alpha <$ enk$\{we_1, we_2\}$, $we_1, we_2 > 0$ koşullarını sağlayacak şekilde seçilmeleri gerekmektedir. Geometrik açıdan α, oluşturulacak destek konisinin tepe açısını değiştirmek için kullanılmaktadır. B_i mutlak değer içindeki ifadenin her zaman pozitif değer almasını önlemek amacıyla kullanılması gereken bir sabit değerdir. Aksi hâlde konik yapı oluşamaz. B_i aynı zamanda çözümlerin civarında aranacağı bir referans noktası görevini de yerine getirmektedir. İki amaçlı bir $\underset{x \in X}{\text{enk}}[F_1(x), F_2(x)]$ problemiyle bu problemin amaç fonksiyonlarından sabit sayıların çıkarılmasıyla elde edilmiş $\underset{x \in X}{\text{enk}}[F_1(x) - B_1,\ F_2(x) - B_2]$ probleminin aynı Pareto etkin çözüm kümesine sahip olduğu izleyen teoremle gösterilmiştir.

Teorem: İki amaçlı bir $\underset{x \in X}{\text{enk}}[F_1(x), F_2(x)]$ problemini (P1) ve bu problemin amaç fonksiyonlarından sabit sayıların çıkarılmasıyla elde edilmiş $\underset{x \in X}{\text{enk}}[F_1(x) - B_1,\ F_2(x) - B_2]$ problemini de (P2) ile gösterelim. $\bar{x}$ (P1) probleminin Pareto etkin çözüm kümesi iken (P2) probleminin çözüm kümesi de aynıdır.

İspat: İspat için iki farklı durumun incelenmesi gerekir.

Durum 1: Eğer $\bar{x}$, P1 probleminin Pareto etkin çözümü iken P2 probleminin çözümü değilse,

$$\exists x_1 \in X : \left(F_1(x_1) - B_1,\ F_2(x_1) - B_2\right) \leq \left(F_1(\bar{x}) - B_1,\ F_2(\bar{x}) - B_2\right)$$

koşulunu sağlayan bazı x_1'ler mevcut olması gerekir. O hâlde,

$$F_1(x_1) - B_1 \leq F_1(\bar{x}) - B_1$$
$$F_2(x_1) - B_2 < F_2(\bar{x}) - B_2$$ olmalıdır. Buradan da
$$F_1(x_1) \leq F_1(\bar{x})$$
$$F_2(x_1) < F_2(\bar{x})$$ sonucu elde edilir.

$\bar{x}$, P1'in Pareto etkin çözümlerinden oluştuğuna göre, bu koşulları sağlayan x_1 çözümünün var olabilmesi olanaksızdır. Bu nedenle $\bar{x}$, P1 probleminin Pareto etkin çözümü iken P2 probleminin de çözümüdür.

Durum 2: Eğer $\bar{x}$, P2 probleminin Pareto etkin çözümü iken P1 probleminin çözümü değilse,

$$\exists x_1 \in X : \left(F_1(x_1),\ F_2(x_1)\right) \leq \left(F_1(\bar{x}),\ F_2(\bar{x})\right)$$

koşulunu sağlayan bazı x_1'lerin mevcut olması gerekir.

$$F_1(x_1) \leq F_1(\bar{x})$$
$$F_2(x_1) < F_2(\bar{x})$$ iken,

Eşitsizliğin her iki tarafından sabit bir sayı çıkarmak eşitsizliği bozmayacaktır.

$$F_1(x_1) - B_1 \leq F_1(\bar{x}) - B_1$$
$$F_2(x_1) - B_2 < F_2(\bar{x}) - B_2$$

$\bar{x}$, P2'in Pareto etkin çözümlerinden oluştuğuna göre, yukarıdaki koşulları sağlayan x_1 çözümünün var olabilmesi olanaksızdır. Bu nedenle $\bar{x}$, P2 probleminin Pareto etkin çözümü iken P1 probleminin de çözümüdür. □

(2) no'lu gösterimin nasıl bir konik yapı oluşturduğu da örnek bir problem üzerinde şöyle gösterilebilir.

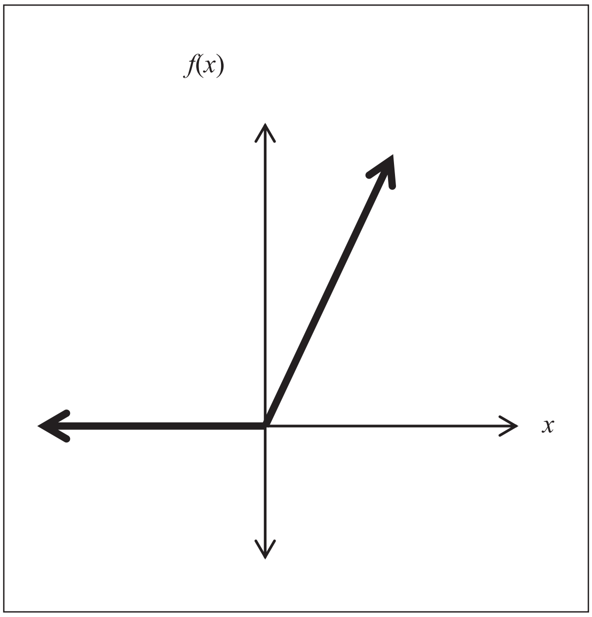
Örnek: $f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad x \in R$ fonksiyonu olsun.

$\alpha|f(x)| + f(x)$ yazılırsa;

$$\alpha|f(x)| + f(x) =$$

$$\alpha|x| + x = \begin{cases} (\alpha+1)x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \qquad (3)$$

elde edilir. (3) nolu fonksiyonun $\alpha = 1$ için çizilen grafiği Şekil 2'de verilmiştir.



Şekil 2. (3) Nolu Fonksiyonun $\alpha = 1$ İçin Çizilen Grafiği

Şekil 2'deki çizimde oluşan konik yapı görülmektedir. Dolayısıyla, konik skalerleştirme için verilen (2) formülasyonu, konik yapının oluşumunu sağlamakta böylece doğru ile desteklenemeyecek dışbükey olmayan bölgelerdeki Pareto etkin çözümlere ulaşmayı garantilemektedir.

Konik skalerleştirme yöntemi daha önce 0-1 öğretici ders atama problemi (Özdemir ve Gasimov, 2004) ve 1,5 boyutlu ana malzeme seçimi problemlerine de (Gasimov vd., 2007) başarıyla uygulanmıştır.

2.2 Çok Amaçlı Sırt Çantası Probleminin Skalerleştirilmesi

0-1 çok amaçlı sırt çantası problemini konik skalerleştirme yöntemiyle çözebilmek için izlenmesi gereken yöntem aşağıda maddeler halinde verilmiştir.

1. Adım: α ve we_i değerlerini $0 \leq \alpha < \text{enk}\{we_1, we_2\}$, $we_1, we_2 > 0$ koşullarını sağlayacak şekilde, [1, 50] aralığından seç. (Bu aralık örneğin [1-100] olarak da seçilebilir. Bu durumda daha çok Pareto etkin çözümün araştırılması mümkün olur.).
2. Adım: Problemi önce verilen parametre aralığında, (1) nolu klasik ağırlıklandırma formülasyonunu kullanarak çöz ve Pareto etkin noktaları belirle (Elde edilen bu noktalar dışbükey Pareto çözümlerdir.).
3. Adım: Olası içbükey Pareto çözümleri elde etmek için (2) nolu formülasyonu kullan. Oluşan matematiksel modeli çöz ve Pareto etkin çözümleri belirle.

Ancak burada dikkat edilmesi gereken bir nokta vardır. Problemin yapısı gereği eğer birim kârlar pozitif ise, tüm amaç fonksiyonları pozitif değer alacağı için konik yapı oluşamaz. Konik yapıyı elde edebilmek için, mutlak değerin içinde negatif ifadelerin de oluşabilmesini sağlamak gerekir. Bunun için *i*. amaç fonksiyonundan sabit bir sayı (B_i) çıkarılmıştır. B_i'lerin alacağı değerler, klasik ağırlıklandırma ile elde edilen çözüm aralıklarının arttığı bölgelerden rassal olarak seçilebilir. Böylece daha önce belirlenmiş olan bazı dışbükey Pareto çözümler arasında, içbükey Pareto çözümlerin de olup olmadığının araştırılması mümkün olur. B_i belli bir değer civarındaki içbükey Pareto çözümlerin araştırılmasına olanak tanıdığı için referans değer olarak isimlendirilmektedir.

Bu düşünceyle düzenlenen Gasimov (2001)'un skalerleştirilmiş amaç fonksiyonu (4) nolu formülasyonda verilmiştir.

$$\underset{(x,y)\in X}{\text{enb}} \left[\alpha \sum_{i=1}^{2} \left| \sum_{j=1}^{n} p_{tj} x_j - B_i \right| + \sum_{i=1}^{2} we_i \left(\sum_{j=1}^{n} p_{tj} x_j - B_i \right) \right] \quad (4)$$

3. DENEYSEL SONUÇLAR

Konik skalerleştirme yönteminin çok amaçlı 0-1 sırt çantası probleminin çözümünde kullanılabileceği ve klasik ağırlıklandırma ile bulunması mümkün olamayacak Pareto etkin çözümlere ulaşılabileceği yazından alınan çeşitli boyutlardaki problemler üzerinde gösterilmiştir.

Sırt çantası problemleri için türetilmiş test problemlerinde genellikle tüm parametreler (w_j, p_{tj}) pozitif tamsayıdır. Kapasite $0<c<\sum w_j$ aralığında yer almaktadır. Ağırlık (w_j) ile kâr (p_{tj}) parametreleri arasındaki ilişkinin durumuna göre problemler korelasyonsuz, düşük korelasyonlu ve yüksek korelasyonlu olarak adlandırılmaktadırlar. Çalışmada kullanılan ilk test probleminin adı f5070w10'dir. f5070w10, $n=70$ parça içeren, korelasyonsuz (p_j ve w_j katsayıları arasında ilişki yok) ve iki amaçlı yapıdadır. w_j ve p_{tj} parametreleri [1, 300] aralığında rassal olarak türetilmiş ve kapasite, toplam ağırlığın yarısı olarak alınmıştır. Çözümler, GAMS paket programının Dicopt çözücüsüyle HP6000 iş istasyonu kullanılarak elde edilmiştir. f5070w10 test probleminin klasik ağırlıklandırma ile bulunan Pareto etkin çözümleri Tablo 2'de verilmiştir. Burada birinci amaç fonksiyonunun aldığı değer F_1 ve ikinci amaç fonksiyonunun aldığı değer ise F_2 ile gösterilmektedir. we_1 ve we_2 sırasıyla F_1 ve F_2'nin ağırlıklarıdır.

Tablo 1. f5070w10 Test Problemi İçin Klasik Ağırlıklandırma ile Elde Edilen Çözüm Sonuçları

we_1	we_2	F_1	F_2
0-4	50-46	8042	8275
5-9	45-41	8502	8231
10-11	40-39	8699	8185
12-13	38-37	8996	8098
14	36	9010	8093
15	35	9052	8076
16-19	34-31	9121	8046
20-22	30-28	**9386**	**7882**
23-27	27-23	**9521**	**7768**
28-35	22-15	9587	7688
36-38	14-12	9688	7437
39-42	11-8	9695	7414
43-47	7-3	9716	7301
48-50	2-0	9729	7077

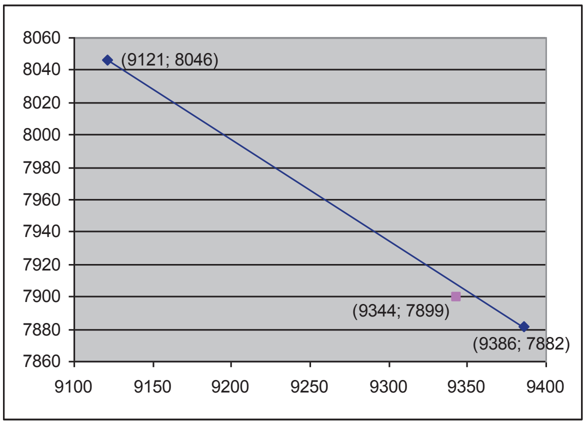
Tablo 1'de verilen değerler, dışbükey Pareto çözümlerdir. Söz konusu çözümlerin aralarında başka çözümlerin olup olmadığı Konik skalerleştirme yöntemiyle araştırılmıştır. Örnek olarak, test problemindeki (9386,7882) ile (9521,7768) noktaları arasında hiper düzlem ile desteklenemeyen ve bu nedenle klasik ağırlıklandırma yöntemiyle elde edilemeyecek çözümlerin varlığı araştırılmıştır. Bu amaçla, referans değerleri B_1=9400 ve B_2=7810 seçilerek konik skalerleştirme uygulanmış ve Tablo 3'te verilmiş olan yeni Pareto çözüm elde edilmiştir.

Tablo 2. f5070w10 Test Problemi İçin Konik Skalerleştirme Yöntemiyle B_1=9400, B_2=7810 İçin Elde Edilen Yeni Pareto Etkin Çözüm

α	we_1	we_2	F_1	F_2
11	11	39	9344	7899

Bulunan yeni Pareto çözümün klasik ağırlıklandırma ile elde edilemeyeceği, Şekil 3'te grafik olarak gösterilmiştir.

Görüldüğü gibi yeni Pareto etkin nokta, klasik ağırlıklandırma ile daha önce bulunmuş olan iki



Şekil 3. f5070w10 Test Problemi İçin Konik Skalerleştirme Yöntemiyle B_1=9400, B_2=7810 İçin Elde Edilen Yeni Pareto Çözüm

nokta arasındaki doğrunun gerisinde kalmaktadır. Bu da o bölgede bir dışbükey olmayan alan olduğunun ve hiper düzlemin o noktada doğru ile desteklenemeyeceğini; yani klasik skalerleştirme ile ilgili çözümün bulunamayacağını göstermektedir. Benzer şekilde diğer ikililer arasında da uygun B_i değerlerinin seçilmesiyle başka Pareto etkin çözümlerin olup olmadığı araştırılabilir. Ancak, seçilen iki nokta arasındaki alan dışbükey ise yeni bir nokta elde edilmesi mümkün olamayacaktır.

Çok amaçlı sırt çantası problemi ayrıca çok sırt çantalı şeklinde de ele alınmaktadır. Çok sırt çantası ile kastedilen, seçilecek ürünler için örneğin hem ağırlık hem de hacim gibi farklı kısıtların olması halidir ve yazında, bu problemin çok sırt çantalı türü (ÇASÇP2) olarak ele alınmıştır. ÇASÇP2 modeli aşağıda verilmiştir.

t : problemdeki amaç ve sırt çantası sayısı
p_{tj} : t. amaç fonksiyonunda j. parçanın kârı
w_{tj} : j. parçanın i. sırt çantasındaki ağırlığı
C_t : t. sırt çantasının kapasitesi

olmak üzere model şöyledir:

$$\text{(ÇASÇP2):} \quad \sum_{j=1}^{n} w_{tj} x_j \le C_t \qquad t = 1,\dots,m$$

$$x_j \in \{0,1\} \qquad j=1,\dots,n$$

kısıtları altında,

$$\text{enb}\left[\sum_{j=1}^{n} p_{1j}x_j,\ldots,\sum_{j=1}^{n} p_{tj}x_j\right]$$

Konik skalerleştirme yönteminin çok amaçlı ve çok sırt çantalı problemlerdeki başarısını göstermek için, Test Problemleri (2010) kullanılmıştır. Buradan alınan 100, 250, 500 ve 750 parçalı, iki ve üç amaçlı yedi farklı test problemi çözülerek Konik skalerleştirme ile Pareto etkin çözümlerin elde edilebileceği gösterilmiştir. İlk olarak iki sırt çantası ve iki amacı olan 100 parçalı bir örnek problem ele alınmıştır. Test probleminin bütün Pareto etkin çözümleri bilinmektedir ve Tablo 3'te verilmiştir. Konik skalerleştirme ile Pareto etkin çözümleri bulmak için öncelikle sadece bir amaç fonksiyonunu eniyileyecek şekilde problem iki kere çözdürülmüş ve 4037 ile

Tablo 3. 100_2 Probleminin Tüm Pareto Etkin Noktaları ve Konik Skalerleştirme ile Elde Edilmiş 17 Çözüm

F_1	F_2	F_1	F_2	F_1	F_2	F_1	F_2
3235	**4037**	3690	3914	3924	3786	4122	3599
3246	4031	3704	3912	3927	3783	4125	3566
3271	4029	**3732**	**3908**	3929	3778	4128	3560
3340	**4028**	3749	3893	3938	3773	4130	3555
3350	4024	3751	3891	3952	3769	4136	3554
3364	4021	3753	3885	**3963**	**3761**	4139	3546
3415	**4017**	3762	3881	3964	3748	4142	3537
3431	4009	3763	3878	3969	3747	4151	3534
3453	4003	3778	3875	3970	3739	4152	3528
3466	4001	3779	3871	3977	3738	**4164**	**3521**
3469	4000	3787	3870	3990	3731	4168	3505
3481	3998	3791	3863	3994	3724	4174	3499
3485	3993	3797	3862	3996	3722	4175	3491
3490	3990	3806	3860	3997	3718	4182	3478
3497	3989	**3822**	**3857**	4009	3717	4185	3466
3511	3987	3825	3851	4010	3716	**4197**	**3462**
3512	3986	3831	3848	4014	3705	4199	3443
3540	3982	3832	3845	4019	3700	4205	3437
3556	3975	3833	3843	**4041**	**3697**	**4215**	**3423**
3568	3971	3834	3842	4050	3680	4218	3400
3582	**3970**	3838	3839	4056	3666	4220	3368
3595	**3966**	3839	3836	4064	3660	4230	3367
3616	3956	3855	3832	4071	3649	4236	3338
3632	3949	3860	3830	4074	3646	4246	3319
3635	3938	3870	3826	4082	3640	4248	3300
3645	3937	3879	3817	4089	3635	4250	3278
3653	3936	3884	3813	4094	3612	**4262**	**3274**
3660	3935	3888	3812	4098	3605	**4266**	**3215**
3666	3926	**3907**	**3806**	4100	3603		
3672	3925	3909	3801	4102	3602		
3688	3919	3918	3792	**4121**	**3595**		

4266 eniyi değerleri elde edilmiştir. Daha sonra α ve we_i değerleri, $0 \leq \alpha < enk\{we_1, we_2\}$, $we_1, we_2 > 0$ koşullarını sağlayacak şekilde, [1, 50] aralığından seçilerek çözülmüş ve Tablo 3'te koyu renkli ve altı çizili olarak gösterilmiş olan 17 Pareto çözüm elde edilmiştir. Elbette ki farklı B_1, B_2, α ve we_i değerleri ve kullanılarak Tablo 3'te verilmiş olan tüm çözümleri elde etmek mümkündür.

Tablo 3'te sonuçları verilen test probleminden farklı olarak yine aynı internet sitesinden alınan yedi farklı özellikteki test problemi daha konik skalerleştirme ile ele alınmış ve o problemlerde de içbükey Pareto etkin çözümlerin bulunabildiği gösterilmiştir. Bunun için ilk olarak α=0,4 ve eşit we_i ağırlıklarının kullanıldığı bir deneme yapılmıştır. Tablo 4'te sonuçlar verilmiştir. Bütün denemelerde çözüm süresi 20 saniyenin altındadır. Tablonun ilk sütununda ilgili test probleminin adı, izleyen üç sütunda ise sırasıyla problemin parça sayısı, sırt çantası sayısı ve amaç sayısı verilmiştir. Son altı sütunda ise sırasıyla kullanılan B_i ve elde edilen F_i değerleri (Pareto etkin çözümler) verilmektedir.

Tablo 4'ten görülebileceği gibi α ve we_i değerleri aynı olmasına rağmen farklı B_i değerleri kullanıldığında tüm problemler için farklı çözümlere erişilmiştir.

Aynı problemlerde, değişik parametre kümesi kullanıldığında farklı Pareto etkin çözümlerin bulunabileceği gösterilebilir. Bu amaçla α=0,1, we_1=0,2, we_2=0,3, we_3=0,5 parametre değerleri ve bu

Tablo 4. Test Problemlerinde α=0,4, we_i=(1/amaç sayısı) Kabulü ile Elde Edilen Sonuçlar

Problem	Parça sayısı	Sırt çantası sayısı	Amaç sayısı	B_1	B_2	B_3	F_1	F_2	F_3
100_2	100	2	2	4000	4000	-	4262	3274	-
				3000	5000	-	4262	3274	-
				5000	3000	-	3340	4028	-
250_2	250	2	2	10.000	10.000	-	9140	9477	-
				7500	15.000	-	9879	7993	-
				15.000	7500	-	7554	10.093	-
500_2	500	2	2	20.000	20.000	-	18.860	19.279	-
				30.000	15.000	-	20.070	16.788	-
				15.000	30.000	-	16.282	20.466	-
100_3	100	3	3	4000	4000	4000	3693	3748	3517
				5000	3000	3000	3095	3908	3603
				3000	5000	3000	3856	3305	3606
				3000	3000	5000	3768	3938	3048
250_3	250	3	3	10.000	10.000	10.000	9103	9028	8553
				15.000	8000	8000	7749	9295	8965
				8000	15.000	8000	6978	7414	9765
				8000	8000	15.000	7298	10.073	7245
500_3	500	3	3	20.000	20.000	20.000	17.921	17.744	18.399
				30.000	15.000	15.000	15.417	18.341	19.055
				15.000	30.000	15.000	18.131	15.856	18.922
				15.000	15.000	30.000	18.356	18.596	15.450
750_3	750	3	3	30.000	30.000	30.000	28.341	27.031	27.248
				40.000	25.000	25.000	24.742	27.467	28.402
				25.000	40.000	25.000	31.174	23.335	23.101
				25.000	25.000	40.000	31.174	23.335	23.101

Tablo 5. Test Problemlerinde α=0,1, we_1=0,2, we_2=0,3, we_3=0,5 Kabulü ile Elde Edilen Sonuçlar

Problem	Parça sayısı	Sırt çantası sayısı	Amaç sayısı	B_1	B_2	B_3	F_1	F_2	F_3
100_3	100	3	3	3000	4000	5000	3775	3534	3609
250_3	250	3	3	8000	10.000	15.000	7944	8672	9359
500_3	500	3	3	15.000	20.000	30.000	17.700	17.092	19.055
750_3	750	3	3	25.000	30.000	35.000	28.146	25.864	28.209

ağırlıklara uygun B_i değerleri kullanılarak üç amaçlı problemler tekrar çözülmüş ve elde edilen sonuçlar Tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 5'ten de görülebileceği parametre kümesi değiştirildiğinde yeni Pareto etkin çözümler bulmak mümkün olmaktadır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada konik skalerleştirme yönteminin hem çok amaçlı 0-1 sırt çantası probleminin çözümünde hem de çok amaçlı ve çok sırt çantalı problemin çözümünde başarıyla uygulanabileceği gösterilmiştir. Bunun için yazından alınan çeşitli test problemleri kullanılmıştır. Çözülen en büyük test problemi 750 parçalı, üç amaç fonksiyonu ve üç sırt çantası kısıtı olan bir problemdir. Bu problemde herhangi bir içbükey Pareto çözüm bulmak için GAMS yazılımının çözücüleri kullanılmış ve 20 saniyenin altında bir süreyle çözüm elde edilmiştir. Bu kadar büyük bir problem için kısa sürede elde edilen sonuç oldukça başarılıdır. Diğer küçük boyutlu problemlerde çözüm elde etmek için geçen süre daha da kısadır. Ayrıca, farklı parametre değerleriyle yapılan denemeler, kolaylıkla birçok Pareto etkin noktanın çözümüne erişilebileceğini de göstermiştir.

Kullanılan yöntem kullanıcıya referans noktalarını seçmesi için olanak tanımaktadır. Çok amaçlı bir problemde, özellikle içbükey görüntü kümesi söz konusuysa, yüzlerce Pareto etkin çözüm olabilir. Çoğu kez bu kadar çok Pareto çözümü listelemek anlamlı değildir ve karar verici sadece amaç fonksiyonlarının kritik bazı değerleriyle ilgileniyor olabilir. Konik skalerleştirme yöntemi, karar vericiye özellikle ilgilendiği bir aralık varsa orası için fazladan bilgiler sağlamakta ve içbükey Pareto çözümleri bulmaktadır. Bu açıdan çok kullanışlıdır. Yöntemin basit olması da benzer diğer yöntemlere göre uygulamada üstünlük sağlamaktadır. Bundan sonraki çalışmalarda ise konik skalerleştirme ile diğer yöntemler arasında Pareto etkin çözümleri bulmadaki başarı, çözüm sürecinin etkinliği vb. gibi ölçütlere göre karşılaştırmalar yapılabilir.

KAYNAKÇA

1. Abboud, N.J., Sakawa, M., Inuiguchi, M. 1997. "A Fuzzy Programming Approach to Multiobjective Multidimensional 0–1 Knapsack Problems," Fuzzy Sets and Systems, 86(1), 1-14.
2. Ahmed, E., Elettreby, M.F. 2006. "On Combinatorial Optimization Motivated by Biology," Applied Mathematics and Computation, 172, 40–48.
3. Alanne, K. 2004. "Selection of Renovation Actions Using Multi-criteria 'Knapsack' Model," Autamation in Construction, 13(3), 377-391.
4. Alves, M.J., Almeida, M. 2007. "MOTGA: A Multiobjective Tchebycheff Based Genetic Algorithm for the Multidimensional Knapsack Problem," Computers & Operations Research, 34 (11), 3458-3470.
5. Bazgan, C., Hugot, H., Vanderpooten, D. 2009. "Solving Efficiently the 0–1 Multi-objective Knapsack Problem," Computers & Operations Research 36, 260 – 279.
6. Captivo, M.E., Climaco, J., Figueira J., Martins, E., Santos, J.L. 2003. "Solving Bicriteria 0-1 Knapsack Problems Using a Labeling Algorithm," Computers & Operations Research, 30, 1865-1886.
7. Chankong, V., Haimes, Y.Y. 1983. Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology, Elsevier Science Publishing Co, New York.

8. Cho, K.I., Kim, S.H. 1997. "An Improved Interactive Hybrid Method for the Linear Multi-objective Knapsack Problem," Computers & Operations Research, 24, 991-1003.
9. Ehrgott, M. 2005. Multicriteria Optimization, Springer-Verlag, 2nd edition.
10. Fleszar, K., Hindi, K.S. 2009. "Fast, Effective Heuristics for the 0-1 Multi-dimensional Knapsack Problem," Computers & Operations Research.
11. Gasimov, R.N. 2001. "Characterization of the Benson Proper Efficiency and Scalarization in Nonconvex Vector Optimization," Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 507, 189-198.
12. Gasimov, R.N., Sipahioglu, A., Saraç, T. 2007. "A Multi-objective Programming Approach to 1.5-dimensional Assortment Problem," European Journal of Operational Research, 179 (1) , 64-79.
13. Henkel, C.V., Back, T., Kok, J.N., Rozenberg, G., Spaink, H.P. 2007. "DNA Computing of Solutions to Knapsack Problems," Biosystems, 88 (1-2), 156-162.
14. Jaszkiewicz, A. 2004. "On the Computational Efficiency of Multiple Objective Metaheuristics. The Knapsack Problem Case Study," European Journal of Operational Research, 158, 2, 418-433.
15. Jenkins, L. 2002. "A Bicriteria Knapsack Program for Planning Remediation of Contaminated Lightstation Sites," European Journal of Operational Research, 140, 2, 427-433.
16. Kellerer, H., Pferschy, U., Pisinger, D. 2004. Knapsack Problems, Springer-Verlag, NY.
17. Klamroth, K, Wiecek, M. M. 2001. "A Time-dependent Multiple Criteria Single-machine Scheduling Problem," European Journal of Operational Research, 135, 1, 17-26.
18. Kumar, R., Banerjee, N. 2006. "Analysis of a Multiobjective Evolutionary Algorithm on the 0– 1 Knapsack Problem," Theoretical Computer Science, 358, 104-120.
19. Laumanns, M., Thiele, L., Zitzler, E. 2006. "An Efficient, Adaptive Parameter Variation Scheme for Metaheuristics Based on the Epsilon-constraint Method," European Journal of Operational Research 169, 932–942.
20. Luc, D.T. 1989. "Theory of Vector Optimization," Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer Verlag, Berlin.
21. Martello, S., Toth, P. 1990. Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations, Wiley, Chichester, UK.
22. Özdemir, M.S., Gasimov, R.N. 2004. "The Analytic Hierarch Process and Multiobjective 0-1 Faculty Course Assignment," European Journal of Operational Research, 157, 2, 398-408.
23. Sakawa, M., Kato, K. 2003. "Genetic Algorithms With Double Strings for 0–1 Programming Problems," European Journal of Operational Research, 144, 3, 581-597.
24. Shih, H.S. 2005. "Fuzzy Approach to Multilevel Knapsack Problems," Computers & Mathematics with Applications", 49(7-8), 1157-1176.
25. Silva, C.G., Climaco, J., Figueira, J. 2006. "A Scatter Search Method for bi-criteria {0,1}-knapsack Problems," European Journal of Operational Research, 169, 373–391.
26. Silva, C.G., Figueira, J., Climaco, J. 2007. "Integrating Partial Optimization With Scatter Search for Solving Bi-criteria {0,1}-knapsack Problems," European Journal of Operational Research, 177 (3), 1656-1677.
27. Teghem, J., Tuyttens, D., Ulungu, E.L. 2000. "An Interactive Heuristic Method for Multi-objective Combinatorial Optimization," Computers & Operations Research, 27 (7-8), 621-634.
28. Test problemleri, 2010. http://www.tik.ee.ethz.ch/sop/download/supplementary/testProblemSuite/. Son erişim tarihi 8 Haziran 2010.
29. Zhang, C.W., Ong, H.L. 2004. "Solving the Biobjective zero–one Knapsack Problem by an Efficient LP-based Heuristic," European Journal of Operational Research, 159, 3, 545-557.