

# Kremayer Takım ile Evolvent Düz Dişli İmalatının Bilgisayar Simülasyonu

**M.Cüneyt FETVACI**

*Yrd.Doç.Dr., İstanbul Üniversitesi Mühendislik Fakültesi*

**C.Erdem İMRAK**

*Doç.Dr., İstanbul Teknik Üniversitesi Makina Fakültesi*

## ÖZET

*Bu çalışmada evolvent profilli düz dişli çarkların bilgisayar simülasyonu için matematik modellenmesi ele alınmaktadır. Kesici takımın denklemleri, koordinat dönüşüm, diferansiyel geometri ve yuvarlanma prensipleri uygulanarak evolvent düz dişli çarkın matematik modeli verilmiştir. Takım ucunun trokoidal yörüngesi de incelenmiştir. Matematiksel ifadeler programlanarak evolvent düz dişlilerin bilgisayar simülasyonu gerçekleştirilmiştir. Sonuçlar grafikler ile takdim edilmiştir.*

**Anahtar Kelimeler:** Dişli tasarım, evolvent, simülasyon

## ABSTRACT

*This paper studies the equations of rack cutters for generating involute spur gears with symmetric teeth. By applying the equations of designed profile of rack cutter, the principle of coordinate transformation, the theory of differential geometry, and the theory of gearing, the mathematical model of involute spur gear with symmetric teeth is given. Trochoidal envelope traced by cutter is also investigated. Computer graphs of symmetric involute spur gears are presented based on the given model, and also generation simulation is illustrated.*

**Keywords:** Gear design, involute, simulation

## GİRİŞ

**P**aralel eksenli miller arasında güç iletimini sağlayan dişliler alın dişli çark mekanizmaları olarak adlandırılmaktadır. Bu mekanizmalarda diş profili olarak daire evolventi, eksenler arası mesafedeki küçük değişimlere tolerans göstermeleri, takım dişli şartını sağlamaları ve kolay imal edilebilir olmaları nedeniyle yaygın olarak kullanılmaktadır. Diş profilinin doğru geometrik ifadesi hafif ve ağır yüklerde temas analizi ve gerilme analizini de kapsayan güvenilir bilgisayar destekli dizayn için esas teşkil eder. Dişli çarkların sayısal metotlarla incelenmesinde modelin doğru tesis edilmesi sonuçların güvenilirliğini belirlemektedir. [1,2]

Dişlilerin seri imalatında yuvarlanma prensibiyle diş boşluğunu şekillendiren kesici takımlar (kremayer kesici, azdırma, pinyon kesici) kullanılmaktadır. Bu tip imalatta kesici takım ile dişli taslağı arasında bağlı hareket mevcuttur. Diş profili evolvent formda aktif yüzeyden ve trokoid forma kök eğrisinden oluşur. Bu eğrileri parametrik olarak tanımlayan ifadeler çeşitli metotlar ile literatürde sunulmuştur [3-8]. Litvin vektör analiz, matris transformasyon, diferansiyel geometri ve yuvarlanma denklemlerini kullanarak diş profillerini ve geometrik özelliklerini tanımlayan metotlar geliştirmiştir [7]. Litvin'in çalışmalarından hareketle standart ve modifiye edilmiş çeşitli

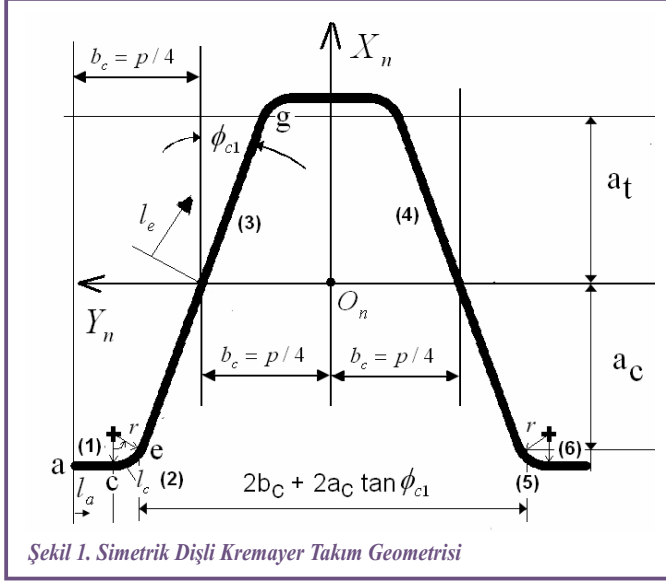
profiller için gerek kremayer tipi takım ve gerekse pinyon kesici takımla imal edilen diş yüzeylerini matematik modelleyen çalışmalar literatürde sunulmaktadır [2,5,8-13].

Bu çalışmada Litvin'in vektör yaklaşımından hareketle evolvent profilli düz dişli çarkların kremayer-tipi takımla imalatının matematik modellenmesi ele alınmıştır. Bu yaklaşıma göre literatürde sunulmuş ifadeler [8,9] simetrik düz dişli çark için sadeleştirilerek kullanılmıştır. Profil kaydırma miktarı yuvarlanma denkleminde ilave edilmiştir. Diğer profil (bombeli diş yanağı gibi) ve kök modifikasyonları göz önüne alınmamıştır. Ayrıca uygun düzenleme ile kesici takımın diş boşluğunu aşama aşama şekillendirmesini gösteren resim ve animasyonlar elde edilmiştir. Takımın yuvarlatılmış ucunun trokoidal yörüngesini inceleyen yaklaşım [14] bu çalışmada verilen matematik modele uyarlanarak diş kökünü şekillendiren eğriler de incelenmiştir. Bu şekilde takımın vektörel gösterimi, nihai diş profilinin elde edilmesi, diş kökünü belirleyen trokoidal yörüngeinde görüldüğü kesme simülasyonu incelenebilmektedir. Geliştirilen hesaplayıcı programın sonuçları grafikler ile sunulmuştur.

## KREMAYER TAKIM GEOMETRİSİ

Çalışmanın bu bölümünde kesici takımın geometrik özellikleri incelenmektedir. Kolaylık açısından düz dişli çarkların imalat simülasyonu iki boyutlu bir problem olarak

göz önüne alınabilir. Şekil 1'de normal kesitte kremayer-tipi takım dişi görülmektedir. Takım sağ ve sol yanlarda referans eksenine simetrik düz uç, yuvarlatılmış köşe ve aktif kenardan oluşmaktadır. Düz uçlar (1 ve 6) dişli çarkın tabanını, yuvarlatılmış köşeler (2 ve 5) çarkın dış kökünü ve aktif kenarlarda (3 ve 4) evolvent yüzeyleri oluşturmaktadır. Referans kremayera ait özellikler ISO53 standartına göre [15].



Şekil 1. Simetrik Dişli Kremayer Takım Geometrisi

Simetri nedeniyle takımın sadece bir tarafını modellemek yeterlidir. Diğer tarafın denklemleri yansıma prensibi ile elde edilir. Aşağıdaki denklemlerde üst işaret takımın sol yanını (1,2,3) alt işaret ise takımın sağ yanını (4,5,6) ifade eder. Denklemlerde homojen koordinat sistemi kullanılmıştır. Şekil 1'de gösterildiği üzere, (1) bölgesi simetrik düz dişlinin tabanını oluşturmaktadır ve  $l_a$  takımın normal kesitinin bir dizayn parametresidir.  $c_y = 0,1,2, \dots$  seçilerek takım istenilen sayıda diş ile tanımlanabilir.  $S_n (X_n, Y_n, Z_n)$  koordinat sisteminde (1 ve 6) bölgesinin denklemi,

$$R_n^{(1)} = \begin{bmatrix} -a_c + r \sin \phi_{c1} - r \\ \pm \left( \frac{\pi m_n}{2} - l_a \right) + c_y \pi m_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

olarak ifade edilir. Dizayn parametresi  $l_a, 0 \leq \pi m_n / 4 - a_c \tan \phi_{c1} - r \cos \phi_{c1}$  ifadesiyle sınırlıdır.  $a_c$  kesici takım dişbaşı yüksekliğini tayin eden parametre,  $b_c = \pi m_n / 4$  takım diş kalınlığının yarısı ve  $\phi_{c1}$  normal kavrama açısıdır. Normal modül  $m_n$  sembolüyle gösterilmektedir.

Kesici takımın (2) bölgesi dişli çarkın dış kökünü tayin eder. Bu bölgenin yer vektörleri  $S_n (X_n, Y_n, Z_n)$  koordinat sisteminde aşağıdaki denklemlerle ifade edilir.

$$R_n^{(2)} = \begin{bmatrix} -a_c + r \sin \phi_{c1} - r \cos l_c \\ \pm (b_c + a_c \tan \phi_{c1} + r \cos \phi_{c1} - r \sin l_c) + c_y \pi m_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Dizayn parametresi  $l_c, 0 \leq l_c \leq 90^\circ - \phi_{c1}$  ifadesiyle sınırlıdır.

Şekil 1'de görüldüğü üzere, kremayer kesici takımın (3) bölgesi dişlinin tahrik ve arka diş yüzeylerini sırasıyla oluşturmaktadır.  $S_n (X_n, Y_n, Z_n)$  koordinat sisteminde (3) bölgesinin yer vektörleri aşağıda verilmiştir.

$$R_n^{(3)} = \begin{bmatrix} l_c \cos \phi_{c1} \\ \pm (b_c - l_c \sin \phi_{c1}) + c_y \pi m_n \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Bu denklemde  $l_e$  dizayn parametresidir ve  $-a_e / \cos \phi_{c1} \leq l_e \leq a_e / \cos \phi_{c1}$  ifadesiyle sınırlıdır.

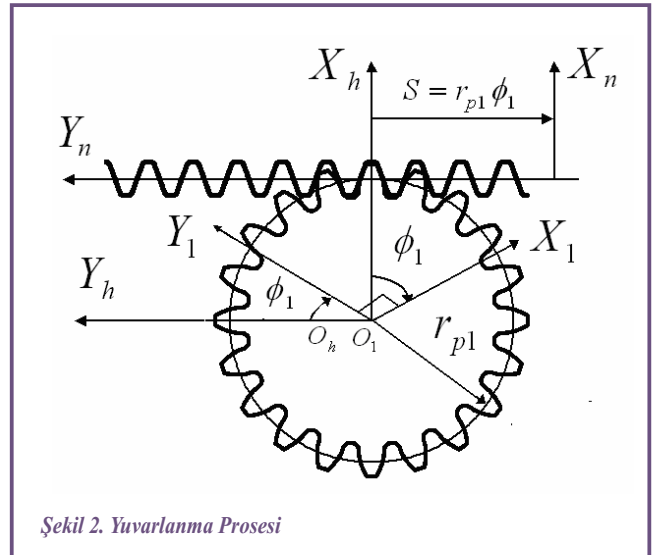
Diferansiyel geometriden, verilen koordinat sisteminde tanımlı takım yüzeylerinin birim normal vektörleri aşağıda denklemle ifade edilir. Bu denklemde  $k_n, Z_n$  ekseninin birim vektörüdür.

$$n_n^i = \frac{\partial R_n^i}{\partial l_j} \times k_n \quad (i = 1 \sim 6) \quad (4)$$

$$n_n^j = \frac{\partial R_n^j}{\partial l_i} \times k_n \quad (j = a \sim f)$$

## DIŞLI ÇARK MATEMATİK MODELİ

İmal edilen dişli çarkın matematik modeli ise yuvarlanma denklemi ile kesici takımın geometrik yerinin bir kombinasyonudur. Kesici takım ile dişli taslağı arasındaki



Şekil 2. Yuvarlanma Prosesi

koordinat bağı Şekil 2'de gösterilmiştir.  $S_n (X_n, Y_n, Z_n)$  kremayer takımın koordinat sistemi,  $S_l (X_l, Y_l, Z_l)$  dişlinin koordinat sistemi ve  $S_h (X_h, Y_h, Z_h)$  sabit olan referans koordinat sistemidir. Koordinat sistemleri sağ el kuralına uymaktadır.

Yuvarlanma prosesinde takım  $S = r_{pl} \phi_1$  kadar öteleme hareketi yaparken dişli taslağı  $\phi_1$  açısı kadar dönmektedir. Bu prensiplere göre aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$R_1^i = [M_{ln}] R_n^i, (i = 1 \sim 6) \quad (5)$$

ve,

$$\frac{X_n^i - x_n^i}{n_{xn}^i} = \frac{Y_n^i - y_n^i}{n_{yn}^i} \quad (6)$$

burada koordinat dönüşüm matrisi,

$$[M_{ln}] = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & r_{p1}(\cos \phi_1 + \phi_1 \sin \phi_1) + e \cos \phi_1 \\ \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & r_{p1}(\sin \phi_1 - \phi_1 \cos \phi_1) + e \sin \phi_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ifadesiyle homojen koordinatlarda verilmektedir.

Bu dönüşüm matrisinde  $e$  terimi takımın taksimat doğrusunun taslağın taksimat dairesine göre ötelenmesini, diğer bir ifadeyle profil kaydırma miktarını, ifade eder. Neticede, takımın vektörel gösteriminden hareketle, koordinat dönüşüm, diferansiyel geometri ve yuvarlanma prensiplerini uygulayarak çark geometrisi elde edilmektedir. Bu matematik model uygun yazılımlarla programlanarak takımın ve dişli çarkın CAD modeli elde edilebilir. Dişliye ait yüzeyleri hassas tanımlayan bu ifadeler sonlu elemanlar yazılımının parametrik dizayn lisanı ile programlanarak ağ oluşturma için gerekli katı modeller de elde edilebilir [16].

## TROKOID EĞRİLERİ

Dişli çarkın yük taşıma kabiliyetini belirleyen en önemli hususlardan biri diş kökündeki eğilme gerilmeleridir. Diş kökünün geometrik şekli eğilmelere doğrudan etki etmektedir. Kesici takımın yuvarlatılmış ucunun merkezi yuvarlanma prosesi neticesinde trokoidal bir yörüngeyi takip eder. Bu eğri birincil trokoid olarak adlandırılır. Takımın ucu ise birincil trokoide eş mesafeli yörüngeyi takip ederek diş kökünü şekillendirir. Bu eğri ikincil trokoid olarak adlandırılır. Eğer takım sivri uçlu ise tek bir trokoid eğrisi söz konusudur.

Şekil 3'de trokoid eğrileri gösterilmiştir. Yuvarlanma neticesinde takım ucu eğrilik merkezinin koordinatlarına  $(x_{T_0}, y_{T_0})$ , yuvarlanma yarıçapına  $r_{p1}$  ve yuvarlanma parametresine

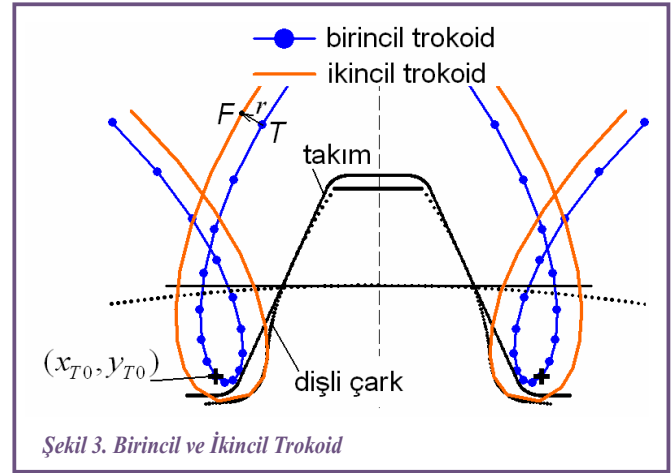
$\phi_1$  bağı olarak birincil trokoide ait  $T$  noktasının kartezyen koordinatları, bu çalışmada verilen matematik modele uygun olarak, aşağıdaki ifadeyle hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{T_0} \cos \phi_1 - y_{T_0} \sin \phi_1 + r_{p1}(\phi_1 \sin \phi_1 + \cos \phi_1) \\ x_{T_0} \sin \phi_1 + y_{T_0} \cos \phi_1 + r_{p1}(-\phi_1 \cos \phi_1 + \sin \phi_1) \end{bmatrix} \quad (7)$$

İkincil trokoide ait bir noktanın koordinatları da aşağıdaki ifadelerle hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \sin(\gamma - \phi_1) \\ r \cos(\gamma - \phi_1) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Burada  $\gamma = \arctan(x_{T_0}/(y_{T_0} r_{p1} \phi_1))$  ve  $r$  takım ucunun yuvarlatma yarıçapıdır. Birincil ve ikincil trokoid eğrileri takım ucu yuvarlatma yarıçapı mesafeli iki eş-mesafeli (equidistant) eğridir. Kesme simülasyonunda yuvarlanma parametresi  $\phi_1$  olarak tayin edilmektedir.



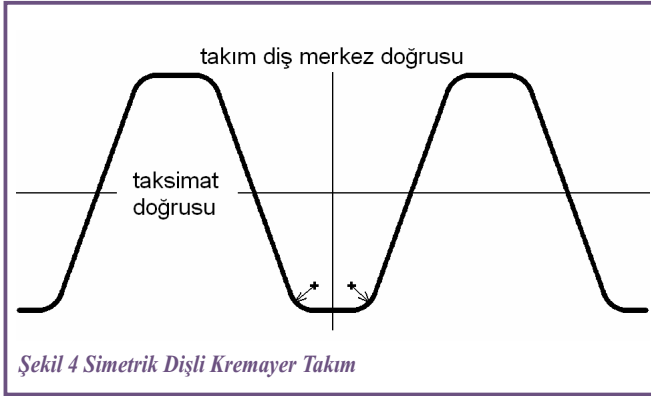
Şekil 3. Birincil ve İkincil Trokoid

## BİLGİSAYAR UYGULAMALARI

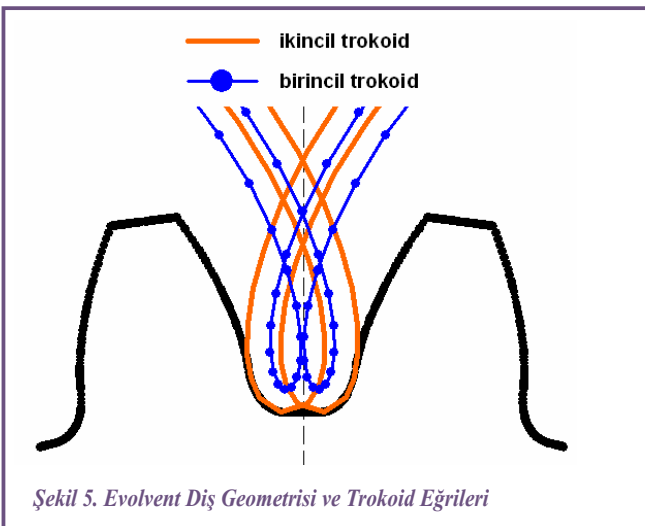
Önceki bölümlerde verilen matematik modeli esas alan bir bilgisayar programı BASIC programlama dili ile geliştirilmiş ve GW-BASIC programında çalıştırılmıştır. Böylelikle çeşitli parametrelerin imal edilen diş profili üzerindeki etkileri incelenebilmektedir. Programın giriş değerleri modül, diş sayısı ve kavrama açısıdır. Programın çıkış dosyaları ise takım profilini, takım ucunun trokoidal yörüngelerini ve dişli çark profilini tayin eden noktaların koordinatlarından oluşur. Akış diagramı ve sayısal bir örnek EK bölümünde sunulmuştur. Bu çalışmada çıkış dosyalarındaki veriler GRAPHER grafik işlemci programında görselleştirilmiştir. Ayrıca takımın kesme hareketini aşama aşama gösteren çıkış dosyaları da elde edilmektedir.

Şekil 4'de ucu her iki kenarından yuvarlatılmış kremayer takım geometrisi gösterilmiştir. Bu takımın imalatında elde

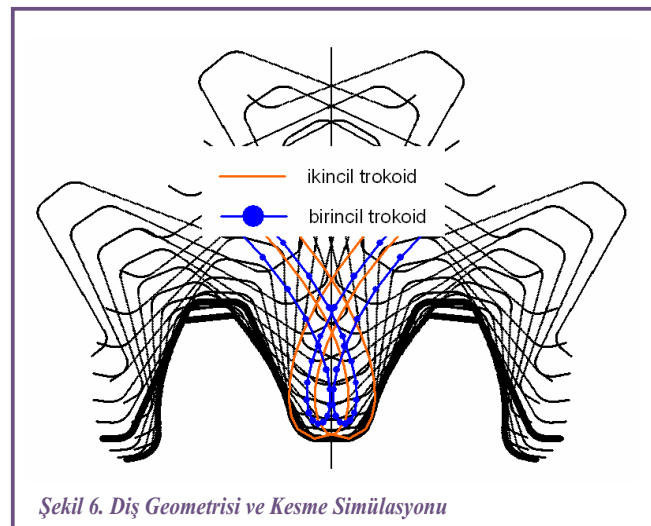
edilen diş geometrisi ve takım ucunun yörüngeleri Şekil 5'de görülmektedir. Birincil trokoid takım ucunun eğrilik merkezinin yörüngesidir. İkincil trokoid ise diş dibini şekillendirmektedir. Şekil 6'daki kompozit resimde simetrik takımın kesme hareketi, yuvarlatılmış ucunun trokoidal yörüngesi ve oluşturulan dişli geometrisi gösterilmiştir.



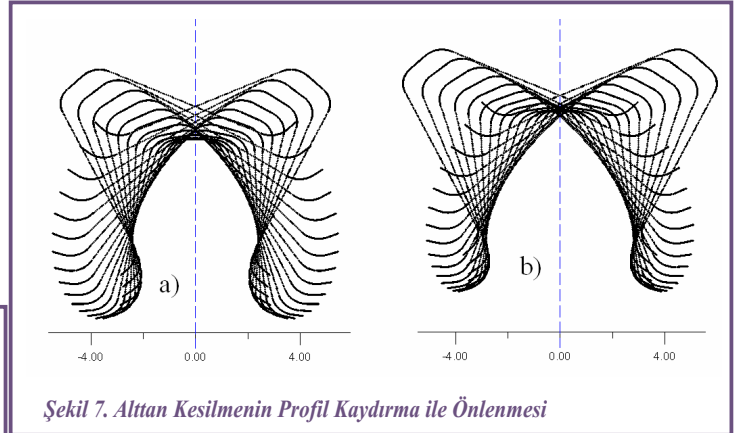
Şekil 4 Simetrik Dişli Kremayer Takım



Şekil 5. Evolvent Diş Geometrisi ve Trokoid Eğrileri



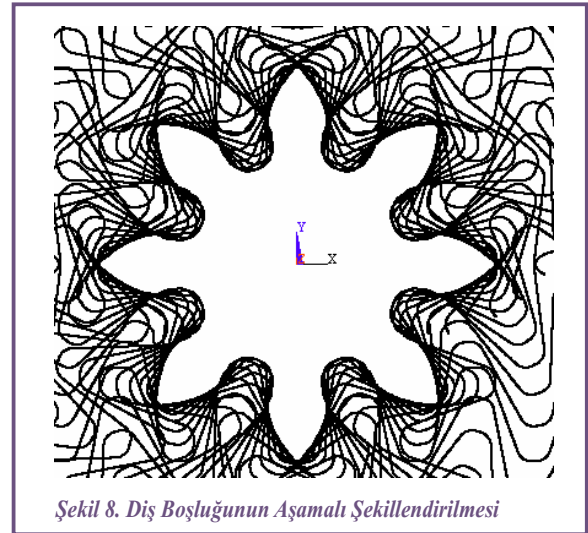
Şekil 6. Diş Geometrisi ve Kesme Simülasyonu



Şekil 7. Alttan Kesilmenin Profil Kaydırma ile Önlenmesi

Şekil 7-a'da küçük diş sayılarında alttan kesilme ve Şekil 7-b'de pozitif profil kaydırma ile alttan kesilmenin önlenmesi gösterilmiştir.

Matematik model kesici takımın istenilen diş sayısında gösterilmesini de sağlamaktadır. Parametrelerin uygun belirlenmesiyle takım ve buna bağlı olarak dişli çark diş merkez doğrusu veya diş boşluğu merkez doğrusuna konumlanacak şekilde gösterilebilir. Şekil 8'de tamamlanmış imalat simülasyonu gösterilmiştir.



Şekil 8. Diş Boşluğunun Aşamalı Şekillendirilmesi

## SONUÇLAR

Vektör yaklaşımı ile matematik modelleme dişli çarkların geometrisini tanımlamada yüksek hassasiyet sağlamaktadır. Ayrıca vektörel ifade çeşitli modifikasyonların modele uygulanmasına da imkan sağlamaktadır. Çalışmada verilen denklemler konvansiyonel evolvent dişli çarkları modellemektedir. Bununla birlikte çeşitli profil modifikasyonları (bombeli diş yanağı gibi) yuvarlanma simülasyonuna uygun olarak adapte edilebilir. Verilen matematik model hem dişli çark profilini göstermekte hemde kesici takımın diş boşluğunu aşamalı şekillendirmesini de

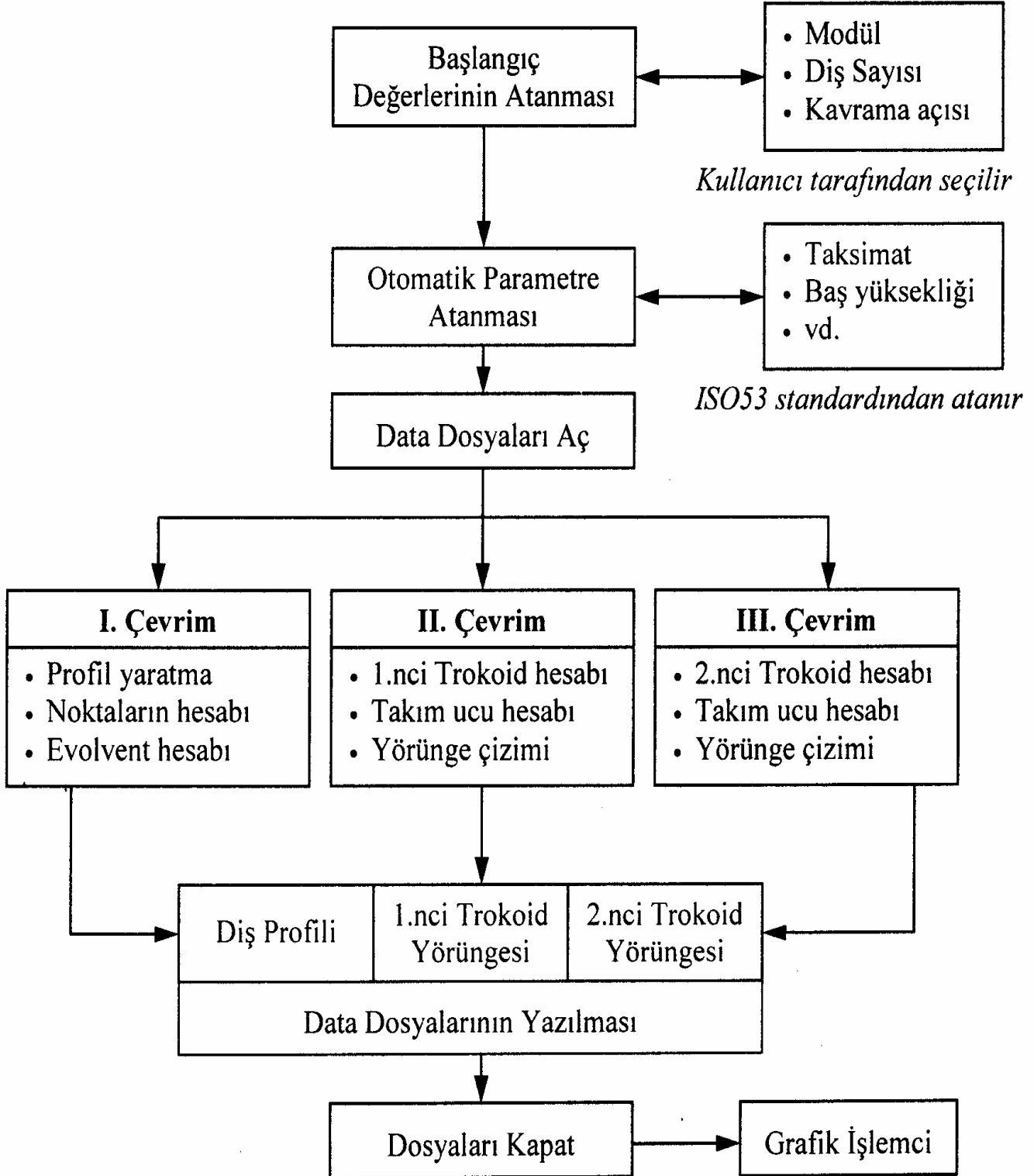
incelemeye imkan tanımaktadır. Yük taşıma kabiliyetini tayin eden önemli bir husus olan diş kök eğrisidir. Diş kökü imalatta takım ucunun takip ettiği trokoidal yörünge ile tayin edilir. Trokoidal yörünge temel dairesi üzerinde tanımlı aktif profili bir miktar keserek faydalı profili kısaltır ve küçük diş sayılarında kök mukavemetini düşürür. Yazarlar takım ucunun takip ettiği bu yörüngeler için bir hesaplama metodunu geliştirmiştir. Gerek evolvent profilin ve gerekse trokoid formda dişdibi eğrisinin hassas modellenmesi dişli çarkların sayısal analizinde (sonlu eleman metodu veya sınır eleman metodu ile) yüksek doğruluk veren ağ yapısının tesisinde önemlidir. Böylelikle dişdibi gerilmesi ve diş temas gerilmesi için hazırlanan modeller analizde güvenilir sonuçlar vermektedir. Dişli imalatının bilgisayar simülasyonu, imalattan önce kesici takım dizayn parametrelerinin ve takım yerleştirmesinin nihai diş geometrisi üzerindeki etkilerinin kolaylıkla incelenmesini sağlamaktadır.

### KAYNAKÇA

1. **Kawalec, A., Wiktor, J. ve Ceglarek, D.**, “Comparative Analysis of Tooth-Root Strength Using ISO and AGMA Standards in Spur and Helical Gears With FEM-based Verification”, *Journal of Mechanical Design*, Cilt 128, s. 1141-1158, 2006.
2. **Vimercati, M.**, “Mathematical Model for Tooth Surfaces Representation of Face-Hobbed Hypoid Gears and Its Application to Contact Analysis and Stress Calculation”, *Mechanism and Machine Theory*, in press, 2006.
3. **Buckingham, E.**, *Analytical Mechanics of Gears*, McGraw-Hill, New York, A.B.D., 1949.
4. **Salamoun, C. ve Suchy, M.**, “Computation of Helical or Spur Gear Fillets,” *Mechanism and Machine Theory*, Cilt 8, No 3, s. 305-323, 1973.
5. **Hefeng, B., Savage, M. ve Knorr, R.J.**, “Computer Modeling of Rack-Generated Spur Gears”, *Mechanism and Machine Theory*, Cilt 20, s. 351-360, 1985.
6. **Arıkan, M.A.S.**, “Determination of Maximum Possible Contact Ratios for Spur Gear Drives with Small Number of Teeth”, *ASME Design Engineering Technical Conferences*, Cilt 82, s. 569-576, 1995.
7. **Litvin, F.L. ve Fuentes, A.**, *Gear Geometry and Applied Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
8. **Tsay, C.-B.**, “Helical Gears with Involute Shaped Teeth: Geometry, Computer Simulation, Tooth Contact Analysis, and Stress Analysis”, *ASME Journal of Mechanical Design*, Cilt 110, s. 482-491, 1988.
9. **Yang, S.-C.**, “Mathematical Model of a Helical Gear with Asymmetric Involute Teeth and Its Analysis”, *Int J Adv Manuf Technol*, Cilt 26, No 5-6, s. 448-456, 2005.
10. **Tseng, J.-T. ve Tsay, C.-B.**, “Mathematical Model and Surface Deviation of Cylindrical Gears with Curvilinear Shaped Teeth Cut by a Hob Cutter”, *Journal of Mechanical Design*, Cilt 127, No 5, s. 982-987, 2005.
11. **Chen, C.-F. ve Tsay, C.-B.**, “Tooth Profile Design for the Manufacture of Helical Gear Sets with Small Numbers of Teeth”, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Cilt 45, No 12-13, s. 1531-1541, 2005.
12. **Litvin, F.L., Lian, Q. ve Kapelevich, A. L.**, “Asymmetric Modified Gear Drives: Reduction of Noise, Localization of Contact, Simulation of Meshing and Stress Analysis”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Cilt 188, s. 363-390, 2000.
13. **Kapelevich, A.L.**, “Geometry and Design of Involute Spur Gears with Asymmetric Teeth”, *Mechanism and Machine Theory*, Cilt 35, s. 117-130, 2000.
14. **Xiaogen, S. ve Donald, R.H.**, “Characteristic of Trochoids and Their Application to Determining Gear Teeth Fillet Shapes,” *Mechanism and Machine Theory*, 35, s. 291304, 2000.
15. **ISO53 (1974) Cylindrical Gears for General and Heavy Engineering-Basic Rack**, International Organization for Standardization, Switzerland
16. **Fetvacı, C. ve İmrak, C.E.**, “Düz Dişlilerde Kavrama Çevriminde Gerilmelerin Değişiminin Sonlu Eleman Metodu ile İncelenmesi”, *Mühendis ve Makina*, Cilt 46, No 545, s. 19-25, 2005.

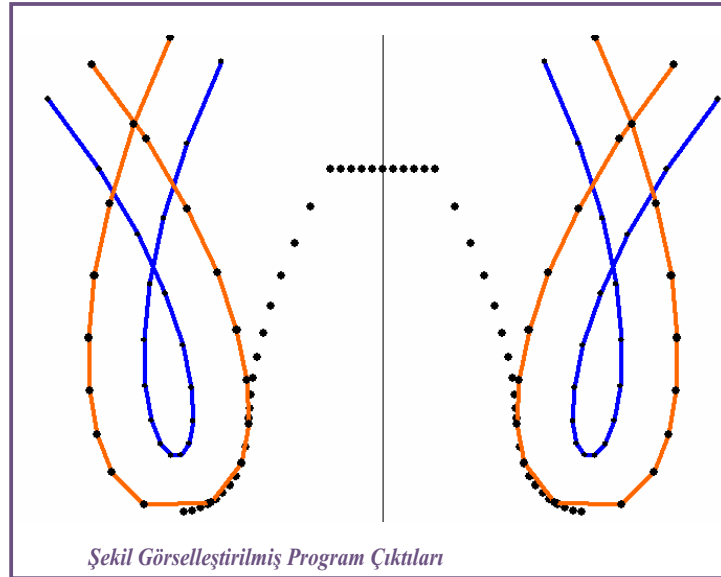
## EKLER

## A) Programın Akış Diagramı



### B) Sayısal Örnek

Programın belirli bir modül, diş sayısı ve kavrama açısı değeri için çalıştırılmış ve sonuçlar sayısal tablo ve grafik olarak aşağıda sunulmuştur.



Tablo Çıkış Dosyalarındaki Veriler

Diş Profili Dosyası		İkincil Trokoid Dosyası		Birincil Trokoid Dosyası	
Y	X	Y	X	Y	X
26.6634	±3.364959	34.71727	±3.59394	34.3102	±2.735574
26.69075	±3.223748	33.24617	±4.211997	32.92011	±3.319704
26.73668	±3.086231	31.89493	±4.635104	31.65649	±3.715513
26.80138	±2.953689	30.68195	±4.886153	30.53929	±3.946926
26.88541	±2.827274	29.62105	±4.989081	29.58543	±4.039749
26.99015	±2.70795	28.71947	±4.96716	28.80868	±4.021358
27.11871	±2.596435	27.97268	±4.83771	28.2195	±3.920332
27.27776	±2.493218	27.34981	±4.588786	27.82492	±3.766129
27.4825	±2.398944	26.79327	±4.041311	27.62852	±3.588706
27.77065	±2.316581	26.82925	±2.907576	27.63038	±3.418166
28.25417	±2.264442	27.50416	±2.390948	27.82706	±3.284391
28.25423	±2.264442	28.16154	±2.268003	28.21169	±3.216678
28.42341	±2.25611	28.895	±2.30112	28.77402	±3.243385
28.65373	±2.233996	29.7489	±2.474624	29.50054	±3.391585
28.94414	±2.19236	30.72743	±2.80468	30.3746	±3.686731
29.29318	±2.12554	31.81963	±3.311928	31.37665	±4.152325
29.69898	±2.027974	33.00719	±4.016454	32.48436	±4.809645
30.15931	±1.894222	34.26731	±4.936328	33.67294	±5.67743
30.67153	±1.718996				
31.23264	±1.497181				
31.83927	±1.223858				
32.4877	±0.8943264				
32.4877	±0.8943264				
32.4877	±0.7154611				
32.4877	±0.5365958				
32.4877	±0.3577306				
32.4877	±0.1788653				
32.4877	0				

**Dizayn Parametreleri**  
Modül =2.5 mm  
Diş Sayısı = 24  
Kavrama Açısı=20 Derece  
Referans Profil : ISO53  
Takım uç yuvarlatılması =0.38xModül