

GÜVENİLİRLİK-TABANLI YORULMA ÖMRÜ TAHMİNİ

Erdem ACAR

Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Havacılık ve Uzay Mühendisliği Bölümü

Bu makalede metalik yapılarıdaki yorulma çatlak ilerlemesi güvenilirlik-tabanlı bir yaklaşım kullanılarak incelenmiştir. Yorulma çatlak ilerlemesi problemi Kırılma Mekaniği prensipleri kullanılarak formüle edilmiştir. Çatlağın kritik boyutlara ulaşmasını temel olarak bir performans fonksiyonu oluşturulmuştur. Açıklayıcı bir örnek verilmiş ve örnek sonuçlarından ilk çatlak boyundaki varyasyonun güvenilirliği azalttığı görülmüştür.

Anahtar sözcükler : Yorulma, çatlak, güvenilirlik, performans fonksiyonu

In this paper, fatigue fracture progression has been investigated based on a safety-based approach. Fatigue fracture progression problem is formulated using the principals of Fracture Mechanics. A performance function has been created making use of fracture's reaching critical dimensions. An explanatory example has been provided and it has been observed by the results of the example that variation in the dimension of the first fracture reduces safety.

Keywords: Fatigue, fracture, safety, performance function.

GİRİŞ

Yorulma çatlak ilerlemesi problemlerinde ömür hesaplanırken, probleme deterministik ya da güvenilirlik-tabanlı olarak yaklaşmak mümkündür. Deterministik yaklaşımda, problemi tanımlarken kullanılan temel değişkenlerin (başlangıç çatlak boyu, malzeme parametreleri, gerilme genliği...vb.) değişmez değerlere sahip olduğu düşünülür (bu değişmez değerler, gerçekte rassal olan temel değişkenlerin ortalama değerleridir) ve bu yolla hesaplanan ömür değeri için güvenlik faktörü tanımlanır. Yorulma problemlerinde güvenlik faktörü olarak genellikle 2 ile 20 arasında bir değer kullanılır. Ancak, yapılarda yorulma çatlaklarının başlangıcı ve ilerlemesi genelde olasılıksal bir olay olarak kabul edilir [1,2]. Yorulma performansı genellikle malzeme özelliklerine, çatlak çevresindeki geometriye, gerilme-gerinme geçmişine bağlıdır ve bunlar yapının tasarlanmış ömrü boyunca rassal olarak oluşabilirler. Bu yüzden, yorulma tasarım süreci genellemeler ve eksik bilgilerin yolaçtığı belirsizliklerle kuşatılmıştır. Bu belirsizliklerin yorulma süreci ve dolayısıyla yapının ömrü üzerinde kesin etkileri bulunmaktadır. Bütün bunlar, yapısal parçaların güvenilirliğinin daha kesin tahmini için, farklı değişkenlerin rassal karakterlerinin başlangıçtan itibaren dahil edilmesinin gerekliliğini ifade eder. Bu yüzden yorulma problemleri için güvenilirlik-tabanlı yaklaşımların kullanılması aslında problemin doğasına daha uygundur.

YORULMA ANALİZİ İÇİN KIRILMA MEKANIĞI YAKLAŞIMI

Yapısal parçalardaki hasarlar üretilme süreçlerinden kaynaklanan nedenlerden dolayı kaçınılmazdır. En genel örnek kaynaklanarak birleştirilmiş yapısal parçalardır ki bu tür parçalara havacılık yapılarında sıklıkla rastlanır. Bu parçalardaki hasarlar daha yük uygulanmadan önce parçalarda kaçınılmaz olarak bulunurlar. Bu durumda çatlak ilerlemesi yükün uygulanmasıyla

birlikte hemen başlayabilir, dolayısıyla parçanın toplam yorulma ömrü Kırılma Mekaniği yaklaşımlarıyla hesaplanabilir. Ayrıca, birçok havacılık yapısında yüksek kırılma tokluğuna sahip malzemeler kullanılır ve bu yapılarda da yapısal parçanın ömrü Kırılma Mekaniği prensipleri kullanılarak hesaplanır.

Basit çekme yüklemesi altında, çatlakın başlangıç boyundan kritik boya ulaşması için gerekli çevrim sayısı Paris-Erdogan [3] denklemi kullanılarak

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \quad (1)$$

ifade edilebilir. İlişkide yer alan a çatlak boyu, N parçanın çevrimsel ömrü, $\frac{da}{dN}$ çatlak büyüme hızı, ΔK gerilim şiddet faktörü, C ve m ise deneysel verilerden elde edilen malzeme sabiteleridir.

Sonsuz büyüklükteki bir plaka için, gerilim şiddet faktörü büyüklüğü ΔK gerilme büyüklüğü σ cinsinden

$$\Delta K = 1.12 \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2)$$

ilişkisi ile ifade edilebilir.

Parçanın yorulma ömrü denklem (1) ve (2) esas alınarak

$$N_f = \frac{a_c^{1-\frac{m}{2}} - a_i^{1-\frac{m}{2}}}{C(1-\frac{m}{2})(1.12 \sigma \sqrt{\pi})^m} \quad (3)$$

olarak bulunur.

Kritik çatlak boyu

$$a_c = \left(\frac{K_{IC}}{1.12 \sigma \sqrt{\pi}} \right)^2 \quad (4)$$

ile hesaplanabilir. Burada K_{IC} malzemenin düzlemsel gerilim kırılma tokluğudur.

GÜVENİLİRLİK-TABANLI TASARIM

Öncelikle, yapının tasarlanan amacını gerçekleştirebilmesini kaybettiği durum olarak tanımlanan "sınır-durumu" nu ifade edebilmek için mekanik prensiplerine dayanan ve yapısal davranışı tanımlayan bir matematiksel model oluşturulur. Sınır-durumu X_1, X_2, \dots, X_n temel değişkenlerine bağlı olarak $g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ fonksiyonu şeklinde ifade edilir, bu fonksiyon için

$g(\mathbf{X}) = 0$ sınır-durumu denklemini (göçme yüzeyi denklemi), $g(\mathbf{X}) > 0$ güvenilirlik durumu, $g(\mathbf{X}) < 0$ göçme durumu olarak değerlendirilir. Burada \mathbf{X} temel değişkenler vektörüdür.

Güvenilirlik (P_s) ise

$$P_s = 1 - P_f = 1 - P[g < 0] \\ = \int_{\Omega} \int_{\Omega} f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (5)$$

olarak tanımlanır. Burada $P []$ parantez içindeki olayın gerçekleşme olasılığı ve $f_{\mathbf{X}}(\cdot)$ ise (X_1, X_2, \dots, X_n) değişkenlerinin bileşik dağılımıdır. Burada integral $g > 0$ ile tanımlı G bölgesi üzerinde gerçekleştirilir.

Güvenilirlik hesabının teorik temeli değişkenlerin olasılık dağılımlarının bilinmesini gerektirir. Fakat, birçok durum için bu olasılık dağılımlarının kesin olarak bilinmesi pek mümkün olmayabilir. Birçok durumda, sadece birinci ve ikinci momentler (yani beklenen değer ve varyans) güvenli olarak bilinebilir. Bu ve diğer bazı zorluklar geliştirilmiş birinci merteye ikinci moment (AFOSM) güvenilirlik-analizi metodunun [4] geliştirilmesine neden olmuştur; bu metod rassal değişkenlerin olasılık dağılımları yerine, birinci ve ikinci derece istatistiksel özellikleri üzerine kurulmuştur.

Eğer temel değişkenler birbirleriyle ilintili değil ise, öncelikle ilintili olmayan indirgenmiş değişkenler kümesi

$$z_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (6)$$

olarak tanımlanır. Eğer temel değişkenler birbirleriyle ilintili ise, bazı transformasyonlar [7] kullanılarak ilintili olmayan değişkenler kümesi elde edilir.

Sonra, sınır-durumu indirgenmiş değişkenler cinsinden tanımlanır.

$$g(z_1 \sigma_{X_1} + \mu_{X_1}, \dots, z_n \sigma_{X_n} + \mu_{X_n}) = 0 \quad (7)$$

Göçme yüzeyinin indirgenmiş değişkenlerin orijinine olan göreceli pozisyonu sistemin güvenilirliğini belirler. Göçme yüzeyinin pozisyonu, göçme yüzeyinden indirgenmiş değişkenlerin orijinine olan en kısa uzaklık olarak temsil edilir [4]. Göçme yüzeyindeki orijine en kısa uzaklıktaki noktanın "en yüksek olasılıklı göçme noktası" ($z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$) olduğu kanıtlanmıştır [5]. Göçme yüzeyine en yüksek olasılıklı göçme noktasında teğet olan düzlem gerçek göçme yüzeyini yaklaşık olarak ifade etmekte kullanılabilir.

$(z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*)$ noktasındaki ilgili teğet düzlem

$$\sum_{i=1}^n (z_i - z_i^*) \left(\frac{\partial g}{\partial z_i} \right)_* = 0 \quad (8)$$

ile ifade edilir. Burada $(\partial g / \partial z_i)_*$ kısmi türevleri $(z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*)$ noktasında hesaplanır.

Göçme yüzeyindeki ilgili nokta bilinmemektedir. Bu noktanın bulunabilmesi için aşağıda ifade edilen optimizasyon probleminin çözülmesi gerekir.

En küçük D (9)

$$\text{Koşullar } g(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$$

Burada D, tanımı denklem (10) ile verilen gerekli en kısa uzaklıktır.

$$D = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2} \quad (10)$$

Bu optimizasyon probleminin çözümü en yüksek olasılıklı göçme noktasını verir. Bu nokta

$$z_i^* = -\alpha_i^* \beta \quad (11)$$

olarak yazılır. Burada β güvenilirlik indeksi, ve α_i ise yön kosinüsleridir. Yön kosinüsleri

$$\alpha_i^* = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial z_i} \right)_*}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial z_i} \right)_*^2}} \quad (12)$$

ile ifade edilirler. Sonrasında rassal değişkenlerin en yüksek olasılıklı göçme noktasındaki değerleri

$$x_i^* = \mu_{x_i}^* - \alpha_i^* \beta \sigma_{x_i} \quad (13)$$

ile hesaplanır. Sınır-durumunun bu değerlerdeki çözümü

$$g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \quad (14)$$

güvenilirlik indeksini (β) verir.

Bu sonuçlar aşağıda verilen yinelemeli (iteratif) prosedürü önerir [6].

- x_i^* için başlangıç değerleri varsayılır ve z_i^* elde edilir.
- $(\partial g / \partial z_i)_*$ kısmi türevleri ve α_i^* değerleri x_i^* noktalarında hesaplanır.
- Elde edilen x_i^* değerleri ile $x_i^* = \mu_{x_i}^* - \alpha_i^* \beta \sigma_{x_i}$ oluşturulur.
- x_i^* değerleri $g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$ denkleminde yerine konur ve β için çözüm yapılır.

(e) Hesaplanan β değeri kullanılarak, $z_i^* = -\alpha_i^* \beta$ değerleri tekrar hesaplanır.

(f) Adım (b) den adım (e)'ye kadar β değeri değişmez değere ulaşana kadar tekrar edilir.

Güvenilirlik indeksi β elde edildikten sonra, güvenilirlik (P_i)

$$P_i = \Phi(\beta) \quad (15)$$

olarak hesaplanır. Burada standard normal dağılım fonksiyonudur.

Göçme olasılığı ise aşağıdaki formül ile hesaplanır.

$$P_i = 1 - \Phi(\beta) \quad (16)$$

Bu yöntemle göre, güvenilirlik indeksi β nın göçme olasılığı P_i ile ilişkilendirilebilmesi için temel değişkenlerin dağılımlarının normal olması gerekir.. Eğer temel değişkenlerin dağılımları normal değilse, P_i bu değişkenlerin eşdeğer normal dağılımları kullanılarak da hesaplanabilir [6]. Eşdeğer normal dağılımlar Rosenblatt transformasyonu kullanılarak elde edilebilir [8]. Buna göre, dağılım normal olmayan bir temel değişken için eşdeğer dağılım; değişkenin normal olmayan dağılımının ve eşdeğer normal dağılımının göçme yüzeyindeki x_i^* noktasındaki dağılım fonksiyonları ve olasılık yoğunluk fonksiyonları değerlerinin birbirine eşitlenmesiyle elde edilir. Bu eşitliklerden eşdeğer normal dağılımın beklenen değeri ve standart sapması

$$\mu_{x_i}^* = x_i^* - \sigma_{x_i}^* \Phi^{-1} [F_{x_i}(x_i^*)] \quad (17)$$

ve

$$\sigma_{x_i}^* = \frac{\phi \{ \Phi^{-1} [F_{x_i}(x_i^*)] \}}{f_{x_i}(x_i^*)} \quad (18)$$

olarak elde edilir. Burada, $\mu_{x_i}^*$ ve $\sigma_{x_i}^*$, x_i değişkeni için eşdeğer normal dağılımın beklenen değeri ve standart sapması, $F_{x_i}(x_i^*)$ x_i ' nin x_i^* noktasında hesaplanan orijinal dağılım fonksiyonu, Φ standard normal dağılım fonksiyonu ve ϕ standard normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

Eşdeğer normal dağılımlar elde edildikten sonra, yukarıda normal dağılımlar için verilen prosedür kullanılarak P_i hesaplanır.

YORULMA ÇATLAK İLERLEMESİ PROBLEMLERİNE GÜVENİLİRLİK- TABANLI BİR YAKLAŞIM

Sınır-durumu fonksiyonu çatlağın başlangıç boyundan kritik boya ulaşması için gerekli çevrim sayısı temel alınarak formüle edilebilir. Bu durumda, $N > N_c$ parçanın göçme durumunu tanımlar. Denklem (5) ve (6) kullanılarak sınır-durumu fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$g(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = \frac{\left(\frac{X_1}{X_2 \sqrt{\pi}}\right)^{2\left(1-\frac{X_3}{2}\right)} - (X_4)^{\left(1-\frac{X_3}{2}\right)}}{X_5 \left(1 - \frac{X_3}{2}\right) \left(1 + 2 X_2 \sqrt{\pi}\right)^{X_3}} - N \quad (19)$$

Burada X_1, X_2, X_3, X_4 ve X_5 rassal değişkenleri sırasıyla düzlemsel gerinim kırılma tokluğu (K_{Ic}), gerilme genliği σ , malzeme parametresi m , başlangıç çatlak boyu a_0 , ve malzeme parametresi 'yi temsil eder, N ise çevrim sayısıdır. Sonra, yukarıda özetlenen AFOSM tekniği kullanılarak, göçme olasılığı kolayca hesaplanabilir. Güvenilirlik-tabanlı yorulma çatlak ilerlemesi modellerinde genellikle rassal değişkenlerin lognormal dağılıma sahip oldukları kabullenilir [9,10].

Lognormal dağılıma sahip bir X rassal değişkeninin eşdeğer normal dağılımının beklenen değer ve standart sapması denklem (17) ve (18) kullanılarak

$$\mu_x^* = x^* \xi_x \text{ ve } \sigma_x^* = x^* (1 - \ln x^* + \lambda_x) \quad (20)$$

şeklinde ifade edilir. Burada λ_x ve ξ_x

$$\lambda_x = \ln\left(\mu_x - \frac{1}{2} \xi_x^2\right) \text{ ve } \xi_x = \sqrt{1 + \delta_x^2} \quad (21)$$

olarak tanımlanır. $\delta_x = \mu_x / \sigma_x$ ise X rassal değişkeninin varyasyon katsayısıdır (COV).

BİR AÇIKLAYICI ÖRNEK

Bu örnekte, yapısal parça kenar çatlaklı 304 çeliğinden yapılmış düzgün bir plaka olarak alınmıştır. Çatlak boyunun plakanın diğer boyutlarına göre çok ufak olduğu durumlarda genliği kaybetmeksizin denklem (2) kullanılabilir. Plakanın, genliği olan çekme-sıfır-çekme çevrimsel yüklemeye maruz kaldığı düşünülmüştür. Temel değişkenlerin X_1, X_2, X_3, X_4 ve X_5 lognormal dağılıma sahip oldukları düşünülmüş ve değişkenlerin beklenen değer ve varyasyon katsayıları Tablo 1 de verilmiştir. Sınır-durumu fonksiyonu olarak çatlağın başlangıç boyundan kritik boya ulaşması için gerekli çevrim sayısı temel alan denklem (19) kullanılmıştır.

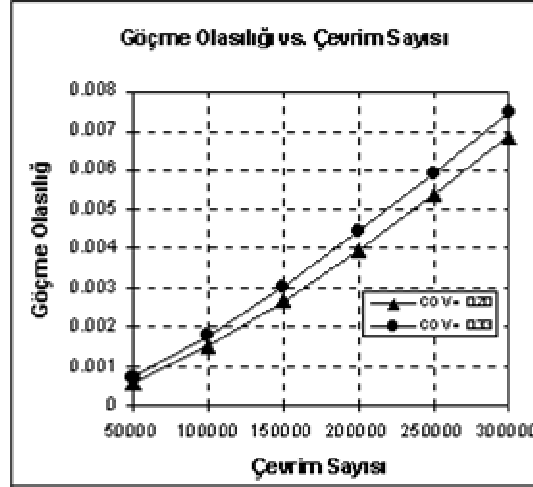
Tablo 1 Temel Değişkenlerin Beklenen Değer ve Varyasyon Katsayıları (COV)

Temel Değişkenler	Beklenen Değerleri	COV
X_1 ()	44	0.10
X_2 ()	200	0.10

X_3 (m)	3.7	0.20
X_4 (°)	0.1 mm	0.33
X_5 (C)		0.20

Rassal değişkenlerin en yüksek olasılıklı göçme noktayı veren değerleri AFOSM tekniği kullanılarak hesaplanır. Göçme yüzeyinden orijine olan en kısa uzaklık güvenilirlik indeksini verir. Göçme olasılığı sınır-durumu foksiyonunun bu noktadaki lineer yaklaşık değeri kullanılarak hesaplanır. Sonuçlar Őekil 1'de verilmiştir.

Őekil 1'de de görüldüğü gibi, göçme olasılığı çevrim sayısıyla orantılı olarak artmaktadır. Analiz başlangıç çatlak boyunun varyasyon katsayısı 0.20 ve diğer değerler aynı alınarak tekrar edilmiştir. Bu iki analizin karşılaştırılması da Őekil 1'de verilmiştir. İkinci analiz sonuçlarına bakıldığında, başlangıç çatlak boyundaki belirlizlik azaldığında parçanın göçme olasılığının azaldığı (bir başka deyişle, parçanın güvenilirliğinin arttığı) görülmüştür. Bunun nedeni, başlangıç çatlak boyundaki belirsizliğin azalması aynı zamanda problemin belirsizliğinin de azalmasını sağlamış dolayısıyla güvenilirliği artırmıştır.



Őekil 1 Başlangıç Çatlak Uzunluğunun İki Farklı COV Değeri için Parçanın Güvenilirlik Değişimi

SONUÇ

Bu makalede yorulma çatlak ilerlemesi problemlerine güvenilirlik-tabanlı bir yaklaşımdan bahsedilmektedir. Güvenilirlik-tabanlı tasarım ve AFOSM (ileri birinci derece ikinci moment) tekniği üzerine özet bilgiler verilmiştir. Ayrıca, yorulma çatlak ilerlemesi problemlerine güvenilirlik-tabanlı yaklaşımı üzerine açıklayıcı bir örnek verilmiştir. Örnekten elde edilen sonuçlardan başlangıç çatlak boyundaki belirsizliğin azaltılmasıyla parçanın güvenilirliğinin artırabileceği sonucuna varılmıştır.

KAYNAKÇA

1. **Freudenthal, A.M.**, "Reliability-Analysis Based on Time to First Failure," Aircraft Fatigue, Pergamon Press, Inc., London, England, 1972.
2. **Tang, J.P. and Yao, J.T.P.**, "Fatigue Damage Factor in Structural Design," Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 98, no. ST1, Jan., 1972.
3. **Paris, P.C. and Erdogan, F.**, "A Critical Analysis of Crack Propagation Laws," Transactions of ASME, Journal of Basic Engineering, vol. D85, 1963, pp.528-534.
4. **Hasofer, A.M. and Lind, N.C.**, "An Exact and Invariant First Order Reliability Format," Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, vol. 100, no. EM1, Proc. Paper 10376, Feb., 1974, pp. 111-121.
5. **Shinozuka, M.**, "Basic Analysis of Structural Safety," Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 109, no. 3, Mar., 1983.
6. **Rackwitz, R.**, "Practical Probabilistic Approach to Design," Bulletinn 112, Comite European de Beton, Paris, France, 1976.
7. **Shinozuka, M.**, "Basic Analysis of Structural Safety," Journal of Structural Division, ASCE, vol. 3, no. 109, Mar., 1983.
8. **Rosenblatt, M.**, "Remarks on Multivariate Transformation," Annals of Mathematics and Statistics, vol. 23, no. 3, Sep.,1952, pp.470-472.
9. **Harkness, H.A., Fleming, M., Moran, B. and Belytschko, T.**, "Fatigue Reliability Method with In-Service Inspections," FAA/NASA International Symposium on Advanced Structural Integrity Methods for Airframe Durability and Damage Tolerance, Sep., 1994, pp. 307-325.
10. **Yang, J. N., His, W.H. and Manning, S.D.**, "Stochastic Crack Growth Models for Application to Aircraft Structures", Probabilistic Fracture Mechanics and Reliability, J.W. Provan (ed), Martinus Nijhoff, The Hague, pp.171-212, 1987.