

DAİRESEL VE BOŞLUKLU DAİRESEL ZARLARIN SERBEST TİTREŞİM HESABI

Hakan ERSOY

*Yrd. Doç.Dr., Akdeniz Üniversitesi,
Makine Mühendisliği Bölümü,
Mekanik Anabilim Dalı, Antalya*

Lütfiye ÖZPOLAT

*İnş. Müh., Akdeniz Üniversitesi,
İnşaat Mühendisliği Bölümü,
Mekanik Anabilim Dalı, Antalya*

Çiğdem DEMİR

*İnş. Müh., Akdeniz Üniversitesi,
İnşaat Mühendisliği Bölümü,
Mekanik Anabilim Dalı, Antalya*

Ömer CİVALEK*

*Doç.Dr., Akdeniz Üniversitesi,
İnşaat Mühendisliği Bölümü,
Mekanik Anabilim Dalı, Antalya
civalek@yahoo.com*

ÖZET

Bu çalışmada, ayrık tekil konvolüsyon (ATK) ve diferansiyel kuadratur (DK) yöntemleri kullanılarak farklı yoğunlukta dairesel ve boşluklu dairesel zar sistemlerin serbest titreşim hesabı sunulmuştur. Ayrık tekil konvolüsyon ve diferansiyel kuadratur yöntemlerinin performansı çeşitli sayısal örnek için test edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Serbest titreşim, dairesel zar, diferansiyel kuadratur, ayrık tekil konvolüsyon.

Free Vibration Analysis of Circular and Annular Membranes

ABSTRACT

In this study, discrete singular convolution (DSC) and differential quadrature (DQ) methods are presented for free vibration analysis of circular and annular membranes with different density. Numerical examples illustrating the accuracy and performance of the DSC and DQ methods are presented.

Keywords : Free vibration, circular membranes, differential quadrature, discrete singular convolution.

* İletişim yazarı

Geliş/Received : 12.02.2009

Kabul/Accepted : 29.06.2009

GİRİŞ

Mühendislik problemlerini sürekli ve süreksiz ortam problemleri olarak iki ana başlık altında sınıflandırabiliriz. Serbestlik derecesi sonsuz büyük olan sürekli ortam problemlerinin çözümü bir diferansiyel veya integral denklem sisteminin çözümünü gerektirdiği hâlde; serbestlik derecesi sonlu olan süreksiz ortam problemlerinin çözümü doğrusal denklem takımının çözümüyle elde edilebilmektedir. Sürekli ortam problemlerinin çözümünde denklem sisteminin oluşturulması aşamasında çeşitli matematiksel güçlüklerle karşılaşılabilir. Bununla birlikte süreksiz ortam problemlerinin çözümünde hesaplayıcı kapasitesi ve hesap süresi değişkenlik gösterir. Membran(zar) sistemler; mühendisliğin pek çok alanında geniş bir kullanım alanına sahiptir. Akustik uygulamalar, biyomekanik, mikrofon, pompa sistemler, basınç regülatörleri, bu alanlardan bazılarıdır. Uygulama amacına göre bu yapılar kare, dikdörtgen, dairesel veya bunların dışında farklı geometriye sahip olabilir. Günümüze kadar; sonlu farklar, sonlu elemanlar, sınır elemanlar, Ritz, Galerkin, diferansiyel kuadratur yöntemleri ya da bazı analitik yöntemler ile membrane sistemlerin statik hesabı ya da serbest ve zorlanmış titreşim hesabı çalışılmıştır.

Casperson ve Nicolet [23] dairesel bir zar sistemin serbest titreşimi analitik olarak incelemiştir. Oden ve Sato [27] tarafından elastik bir zarın gerilme ve deplasman hesabı o yıllarda popüler olan sonlu elemanlar metodu ile hesaplanmıştır. Yine sonlu elemanlar metodu ilk defa Mei [25] tarafından dairesel zarların serbest titreşim hesabında kullanılmıştır ve çalışmada yoğunluğun üniform değişmediği özel durum içinde çözüm yapılmıştır. Yapılan üç farklı çalışmada [14,15,17] polinomal bir yaklaşım kullanılarak çeşitli geometride zar sistemlerin serbest titreşim hesabı yapılmıştır. Son zamanlarda yaklaşım fonksiyonu olarak radyal fonksiyonları esas alan bir diferansiyel kuadratur yöntemi [16] önerilmiş ve yöntem çeşitli geometrilerdeki zar sistemlerin frekans hesabında başarıyla kullanılmıştır. Sonlu elemanlar yöntemi ve analitik yöntemlerin kullanıldığı çalışmalarda [20,21,22] dairesel, eliptik ve diğer bazı geometrideki zarların serbest titreşim analizi yapılmıştır. Konu hakkında mevcut literatür daha çok Ritz, sonlu elemanlar ve bazı analitik yöntemleri içermektedir [18-25].

Bu çalışmada diferansiyel kuadratur (DK) ve ayrık tekil konvolüsyon (ATK) yöntemleriyle [1-3] dairesel ve boşluklu dairesel zar sistemlerin serbest titreşim hesabı yapılacaktır.

Sonuçlar sonlu elemanlar ve diğer yöntemler ile bulunan değerler ile karşılaştırmalı olarak sunulacaktır.

DİFERANSİYEL KUADRATUR (DK) YÖNTEMİ

Diferansiyel kuadratur metodu; “bir fonksiyonun verilen bir ayrık noktadaki bir uzay değişkenine göre kısmi türevi, o değişken bölgesinin bütün ayrık noktalarındaki fonksiyon değerlerinin ağırlıklı bir lineer toplamı ile ifade edilir” [3], şeklinde tanımlanan düşünceye dayanır. Yeter yaklaşıktaki sonuçlar elde etmek için daha az sayıda düğüm kullanan diferansiyel kuadratur metodu; fizik ve mühendislikte karşılaşılan başlangıç değer ve sınır değer problemleri için farklı bir yaklaşım ortaya koymuştur. Kuvvet polinomlarının kullanılması ile tek boyutlu bir $\psi(x)$ fonksiyonun birinci türevini x_i ($i=1,2,\dots,N$) noktalarında N ayrık nokta için göz önüne alırsak i .nci ayrık nokta için birinci türev

$$\psi, x(x_i) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N a_{ij} \psi(x_j); i=1,2,\dots,N \quad (1)$$

olacaktır. Burada x_j değişken bölgesindeki ayrık noktaları, $\psi(x_j)$ bu noktalarındaki fonksiyon değerlerini, ve a_{ij} birinci dereceden türev için bu değerleri fonksiyon değerlerine bağlayan ağırlık katsayılarını ifade eder. Ağırlık katsayılarının hesabı, karşılık gelen koordinat yönlerinde fonksiyonel yaklaşımlar ile gerçekleştirilir. Test fonksiyonu ya da yaklaşım fonksiyonu olarak bilinen bu fonksiyonların seçiminde süreklilik şartına dikkat edilmelidir. Benzer zorunluluk sonlu elemanlar yöntemindeki enterpolasyon fonksiyonlarının seçiminde de vardır. Ancak DK metodunda, seçilen fonksiyonlarının Ritz yönteminde olduğu gibi sınır şartını sağlaması zorunluluğu yoktur. Yaklaşım fonksiyonları, alan değişkenlerinin olası kararlı yani eşit dağılmış durumlarını tanımlayabilmeli ve diferansiyel denklemdeki ya da sınır şartlarındaki mevcut en yüksek dereceli diferansiyele kadar türevinin alınabilmesi gerekir. Yani süreklilik şartı için, bir koordinat yönündeki düğüm sayısı, diferansiyel denklemdeki karşılık gelen bağımsız değişkene göre en yüksek dereceli türevin bir fazlasına eşit olmalıdır [4]. Kuvvet polinomları kullanımında (1) denklemi tam olarak alındığında, test fonksiyonu olarak $(N-1)$ veya daha küçük dereceden seçilen polinom fonksiyonu için [5];

$$\psi_k(x) = x^{k-1}, \quad k=1,2,\dots,N \quad (2)$$

verilen denklem (1)'de yerine yazılırsa aşağıda belirtildiği formda bir lineer denklem takımı verir.

$$(k-1)x_i^{k-2} = \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j^{k-1} \quad (3)$$

Benzer işlemler iki ve daha fazla dereceden türev ifadeleri için de yazılabilir. Böylece, her bir dereceden türev için ağırlık ifadeleri birinci dereceden türev ifadesinden farklı olmaktadır. İkinci dereceden türev için metot

$$\psi_{,xx}(x_i) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N B_{ij} \psi(x_j) \quad i=1,2,\dots,N \quad (4)$$

olarak verilir. Burada b_{ij} ikinci dereceden türev için ağırlık katsayısıdır. Denklem (4) birinci dereceden ağırlık katsayıları cinsinden [6]

$$\psi_{,xx}(x_i) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{jk} \psi(x_k); \quad i=1,2,\dots,N \quad (5)$$

olarak yazılır. Denklem (2) ile verilen polinom fonksiyon uygulanırsa ikinci dereceden türev ifadesi

$$(k-1)(k-2)x_i^{k-3} = \sum_{j=1}^N B_{ij} x_j^{k-1} \quad (6)$$

olmaktadır. Bu denklem yukarıda verilen (3) denkleminde benzer yaklaşımla çözülür. Düğüm noktaları için eşit aralıklı noktalar ile işlem kısmen daha kolay ve uygulaması daha basittir. Çalışmada; koordinat yönünde eşit aralıklı seçilen

$$x_i = \frac{i-1}{N-1}; \quad i=1,2,\dots,N \quad (7)$$

düğüm noktaları ya da aşağıda verilen eşit olmayan aralıklı

$$x_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right] \quad (8)$$

Chebyshev-Gauss-Lobatto düğüm nokta dağılımı kullanılmıştır.

AYRIK TEKİL KONVÜLYON YÖNTEMİ

Diğer sayısal yöntemlerde olduğu gibi, ayrık tekil konvülyon yöntemi (ATK) de mevcut bir türev denklemi yani sürekli bir sisteme ait denklemi yaklaşım veya test fonksiyonu (sonlu elemanlarda şekil fonksiyonu) olarak kerneller kullanarak ayırıştırır. Kernel olarak Shannon kernel, Shannon delta kernel, Dirichlet kernel, de la Vallee kernel vb. kullanılır. Detaylı bilgi Wei [7,8] ve Civalek [9,10] tarafından sunulan çalışmalarda bulunabilir. Tekil bir konvülyon [7]

$$F(t) = (T * \eta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T(t-x)\eta(x)dx \quad (9)$$

ile tanımlanır. Çalışmada kernel olarak Shannon delta kernel (SDK) ve Lagrange kernel(LK) kullanılmıştır. Shannon kernel [8]

$$\delta_{\Delta,\sigma}(x-x_k) = \frac{\sin[(\pi/\Delta)(x-x_k)]}{(\pi/\Delta)(x-x_k)} \exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right]; \sigma > 0 \quad (10)$$

olarak tanımlanır. Burada $\Delta = \pi / (N-1)$ her bir düğüm arası aralık ve N düğüm nokta sayısı. Burada σ parametresi Gauss zarfı (Gaussian envelope) genişliği olarak bilinir ve $\sigma = rh$ ile hesaplanır. Burada r hesaplamasının başında seçilecek bir parametredir, h ise hesap aralığıdır. ATK yönteminde herhangi bir f(x) fonksiyonunun x_i noktası için x koordinat yönündeki türevi aşağıdaki toplam ile verilir [9]

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=x_i} = \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta,\sigma}^{(n)}(x_i-x_k) f(x_k); \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (11)$$

Burada üst indis n türevin mertebesidir. Ayrık gösterimde bu türev [10]

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n} \Big|_{x=x_i} \approx \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta,\sigma}^{(n)}(k\Delta x_N) f_{k,j} \quad (12)$$

Shannon kernel kullanılıncsa türev için gerekli katsayılar yani $\delta_{\Delta,\sigma}^{(n)}(x)$ ifadeleri kolayca hesaplanır. Burada $M=N$ veya $M=N+1$ dir. Örnek olarak ikinci mertebeden türev için bu terim [11]

$$\begin{aligned} \delta_{\Delta,\sigma}^{(2)}(x_m-x_k) &= -\frac{(\pi/\Delta)\sin(\pi/\Delta)(x-x_k)}{(x-x_k)} \exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right] - 2\frac{\cos(\pi/\Delta)(x-x_k)}{(x-x_k)^2} \\ &\exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right] - 2\frac{\cos(\pi/\Delta)(x-x_k)}{\sigma^2} \\ &\exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right] + 2\frac{\sin(\pi/\Delta)(x-x_k)}{\pi(x-x_k)^3/\Delta} \\ &\exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right] + \frac{\sin(\pi/\Delta)(x-x_k)}{\pi(x-x_k)\sigma^2/\Delta} \\ &\exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right] + \frac{\sin(\pi/\Delta)(x-x_k)}{\pi\sigma^4/\Delta} (x-x_k) \\ &\exp\left[-\frac{(x-x_k)^2}{2\sigma^2}\right] \end{aligned} \quad (13)$$

Lagrange Kernel (LK)

Bu kernel aşağıdaki şekilde tanımlı olup $i = 0, 1, \dots, N-1$ and $j = -M, \dots, M$ için

$$\mathfrak{K}_{i,j}(x) = \begin{cases} \prod_{k=i-M, k \neq i+j}^{i+M} \frac{x-x_k}{x_{i+j}-x_k}, & x_{i-M} \leq x \leq x_{i+M}, \\ 0 & \end{cases} \quad (14)$$

Bu durumda türev katsayıları

$$W_{i,j}^{(n)} = n \left[W_{ij}^1 W_{ij}^{(n-1)} - \frac{W_{ij}^{(n-1)}}{(x_i - x_{i+j})} \right] \quad (15)$$

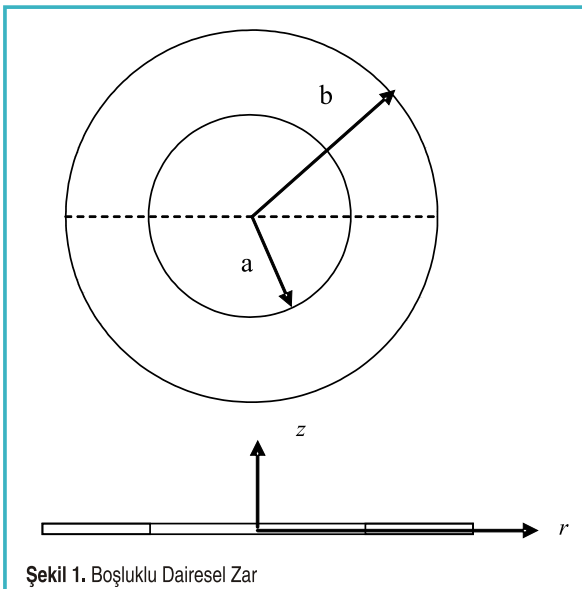
ile tanımlıdır. Detaylı bilgi literatürde mevcuttur [10-13].

DAİRESEL ZAR

Dairesel zar için detaylı sonuçlar diğer sayısal yöntemler ile elde edilen sonuçlardan bulunabilir [14-25]. Şekil 1'de görülen yarıçapları sırasıyla b, a olan ve radyal koordinatı r olan bir zar dikkate alalım. Boyutsuz serbest titreşim denklemi [18]

$$r \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\partial W}{\partial r} + \Omega^2 f(r)rW = 0, \quad (16)$$

Bu denklemde W düşey deplasmanı, ρ kütle yoğunluğunu, ω açısal frekansını ve T çevre boyunca etkiyen gerilmeyi ifade eder. Membranın yoğunluğu r koordinatının bir doğrusal fonksiyonu olsun:



Şekil 1. Boşluklu Dairesel Zar

$$\rho(r) = \rho_0(1 + ar) \quad (17)$$

Boyutsuz değişkenler:

$$r_0 = a/b, \Omega^2 = \omega^2 b^2 \rho_0 / T \quad (18)$$

AYT yöntemini ilgili denkleme uygulayınca

$$r \sum_{j=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(2)}(k\Delta r) W_{i,j} + \sum_{k=-M}^M \delta_{\Delta, \sigma}^{(1)}(k\Delta r) W_{i,j} + \Omega^2 f(r)r_i W_i = 0, \quad (19)$$

elde ederiz. Zar kenar noktalarında deplasman yapmayacaktır. Sınır koşulu olarak

$$W=0 \text{ kenarlarda} \quad (20)$$

Düğüm nokta dağılımı için Wang ve Wang [28] tarafından önerilen aşağıdaki formül kullanılmıştır:

$$r_i = b + \frac{a-b}{2} \left[\frac{i-1}{N-1} \right] \quad (21)$$

SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde ilk olarak verilen formülasyonun yeterliliği gösterilecektir. Bu amaçla dairesel bir zar sistemin serbest titreşimini dikkate alalım. Farklı yoğunlukta zar sistemin birinci frekans değeri hem DK ve hemde ATK yöntemiyle hesaplanmış ve Tablo 1'de listelenmiştir. Literatürde mevcut kesin sonuçlar [2] ve diğer sayısal yöntemler ile hesaplanan sonuçlar [21] ile karşılaştırılmıştır. Sonuçlardan görüleceği üzere her iki yöntemle bulunan değerler literatür sonuçları ile uyum içindedir. Her iki yöntem için 11 adet düğüm noktası kullanılmıştır. Bundan sonraki sonuçlar ATK yöntemiyle hesaplanıp $N=11$ kullanılacaktır.

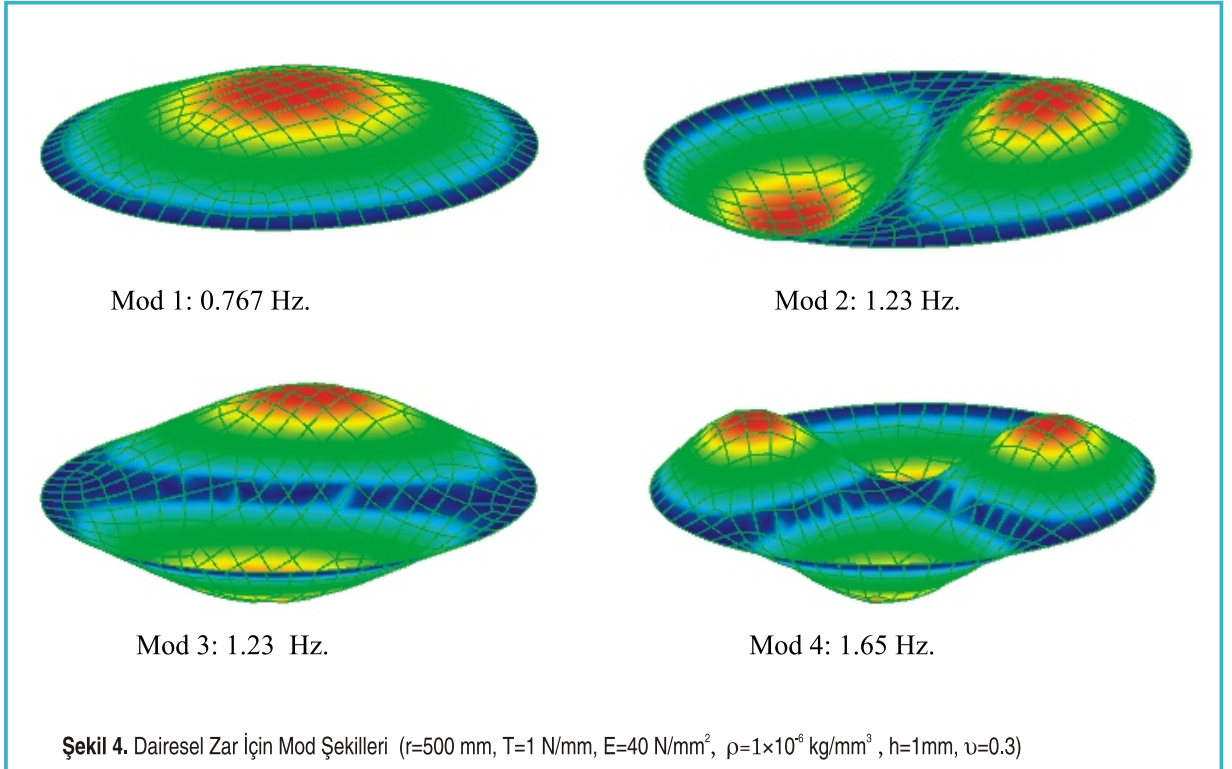
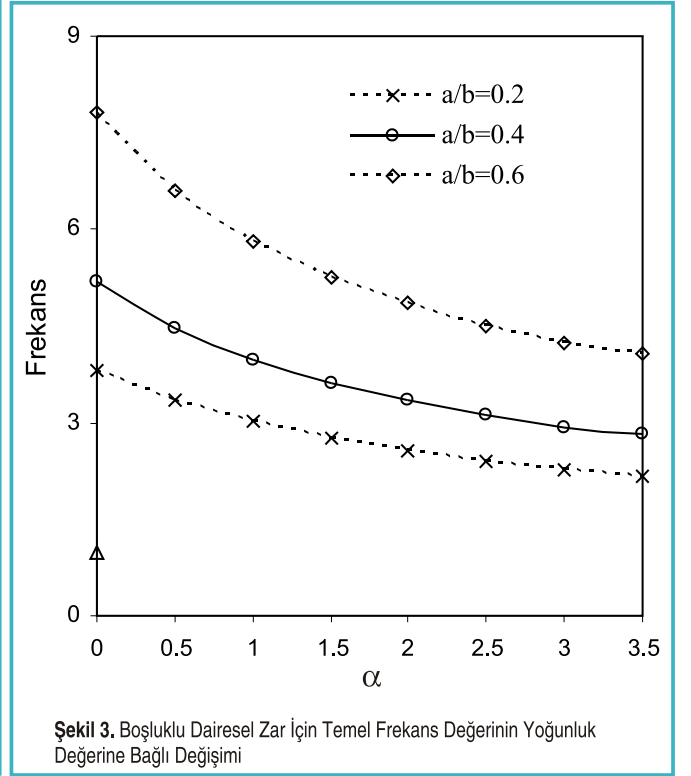
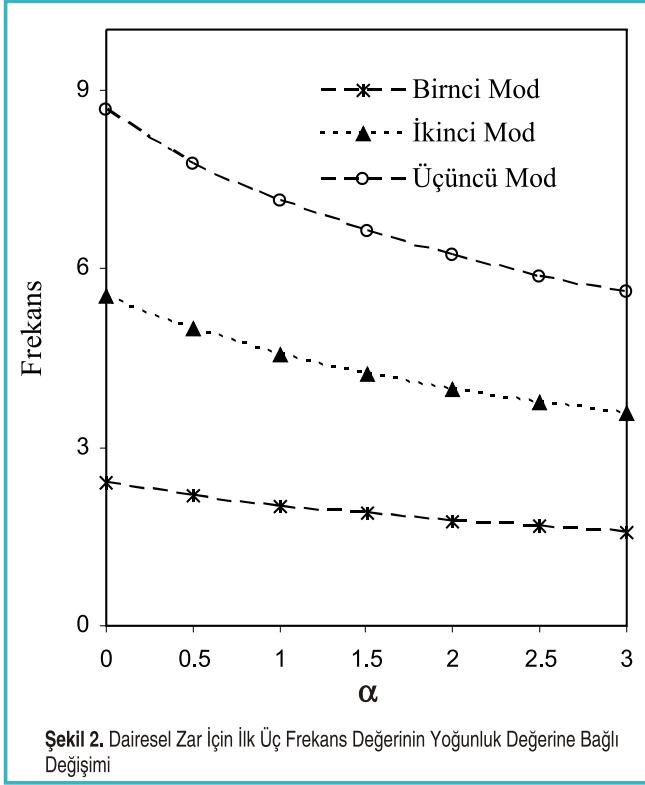
Tablo 1. Dairesel Zar İçin Temel Frekans Değeri [$\rho(r) = \rho_0(1+ar)$]

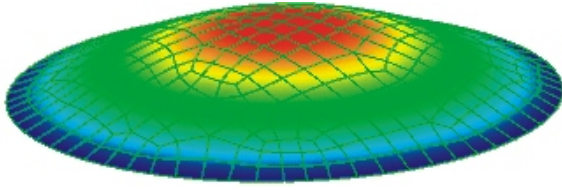
α	Ref. 20 Kesin değer	Ref.21	Ref.21 Sonlu elemanlar	Bu çalışma	
				DK N=11	ATK N=11
0.5	2.1827	2.1827	2.1828	2.1828	2.1827
1.0	2.0108	2.0108	2.0109	2.0110	2.0108
1.25	-	-	-	1.9322	1.9325

Diğer sonuçlar Şekil 2-6'da özetlenmiştir. Şekil 2'de dairesel zar için ilk üç frekans değeri farklı yoğunluk değerleri için sunulmuştur. Yoğunluk katsayısı arttıkça, frekans değerleri her üç mod için azalmaktadır. Bu azalma yüksek modlarda daha belirgindir. Şekil 3'te ise boşluklu dairesel zar için temel frekans değeri verilmiştir. Sonuçlar farklı çap oranları için şekilde gösterilmiştir. Frekans değerleri yoğunluk değeri ile azalmakta, dış çapın artması ile artmaktadır. Şekil 4-6'da ise dairesel zar için ilk dört mod şekli farklı gerilme değerleri (T)

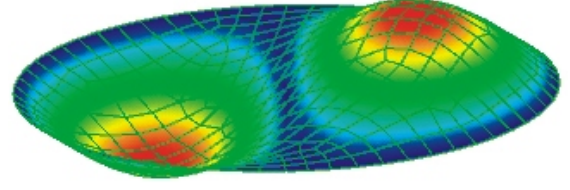
in sunulmuştur. Zar çevresinde etkiyen bu gerilme arttıkça frekans değerleri artmaktadır. Şekil 7'de her iki yöntem karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma için dairesel zar sisteminin

ilk frekans değeri kullanılmıştır ve $\alpha=1$ alınmıştır (Tablo 1). DK yöntemi için dairesel zar sistemde eşit (Denklem 7) ve eşit olmayan düğüm nokta dağılımları (Denklem 8) kullanılmıştır.

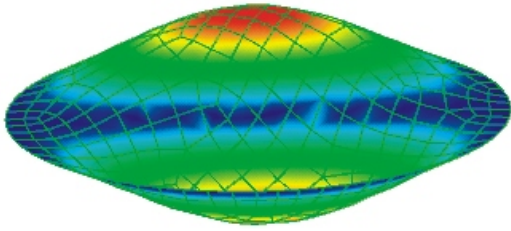




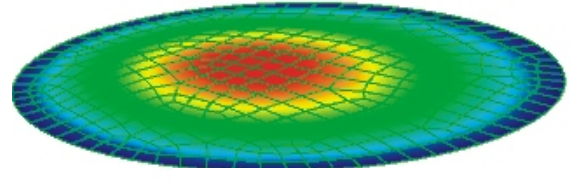
Mod 1: 2.43 Hz.



Mod 2: 3.88 Hz.

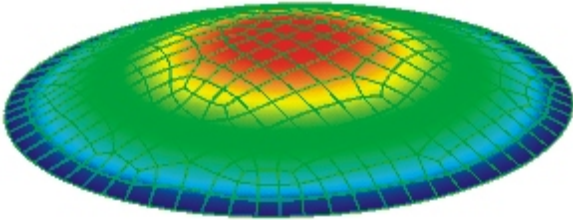


Mod 3: 3.88 Hz.

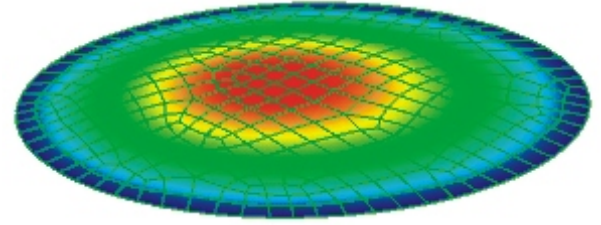


Mod 4: 4.81 Hz.

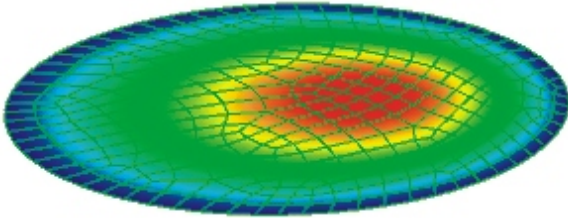
Şekil 5. Dairesel Zar İçin Mod Şekilleri ($r=500$ mm, $T=10$ N/mm, $E=40$ N/mm², $\rho=1 \times 10^{-6}$ kg/mm³, $h=1$ mm, $\nu=0.3$)



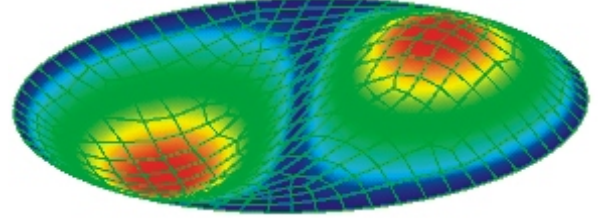
Mod 1: 24.3 Hz.



Mod 2: 24.6 Hz.



Mod 3: 24.6 Hz.

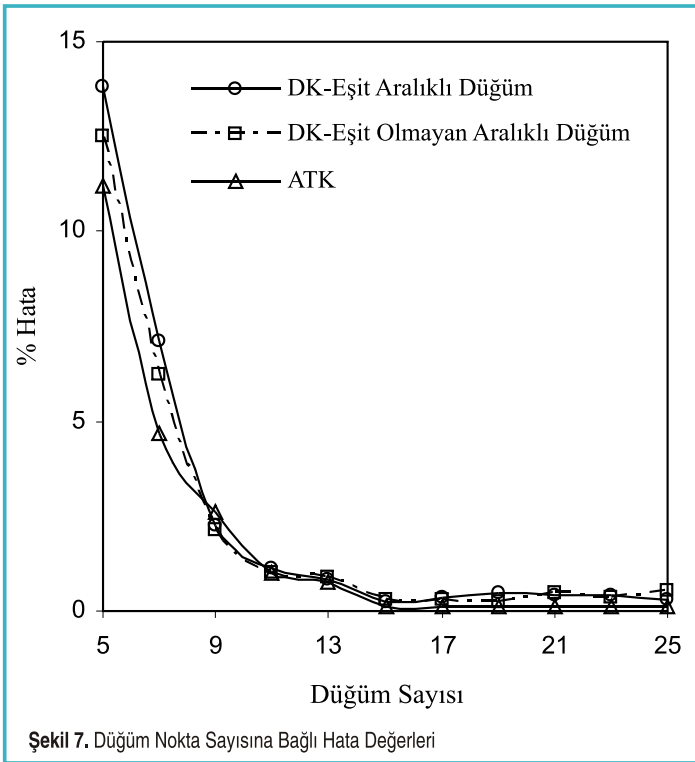


Mod 4: 38.8 Hz.

Şekil 6. Dairesel Zar İçin Mod Şekilleri ($r=500$ mm, $T=100$ N/mm, $E=40$ N/mm², $\rho=1 \times 10^{-6}$ kg/mm³, $h=1$ mm, $\nu=0.3$)

Boşluklu dairesel zar sistemde ise Denklem (21) kullanılmıştır. ATK yöntemin yakınsaması kısmen daha iyidir. Belirli bir düğüm nokta sayısından sonra sonuçlar değişmemektedir. Detaylı sonuçlar birinci yazarın seminer çalışmasında [26] bulunabilir.

Son olarak daire halkası bir zar için temel frekans değeri literatürdeki sonuçlar ile birlikte karşılaştırmalı olarak Tablo 2'de özetlenmiştir. ATK yöntemi N=19 düğüm nokta sayısı için kesin değere çok yakın sonuçlar vermiştir. DK yöntemi ile hesaplanan sonuçlarda ATK ve diğer yöntemler ile bulunan sonuçlara yakındır.



Tablo 2. Daire Halkası Zar İçin Temel Frekans Değeri

	a/b=0.4	a/b=0.6	a/b=0.8
Ref. 29 (kesin değer)	5.1831	7.8284	15.6981
Ref.29 (sonlu elemanlar)	5.1867	7.8337	15.7085
ATK (N=11)	5.1902	7.8305	15.7003
ATK (N=19)	5.1845	7.8286	15.6980
DK (N19)	5.1848	7.8290	15.6983

SONUÇ

Bu çalışmanın esas amacı, ATK ve DK yöntemlerinin titreşim problemlerinde kullanılabilirliğini göstermek ve metodu daha önce uygulanmamış problemlere uygulamaktır. Bu amaçla dairesel ve boşluklu dairesel

zarların serbest titreşim hesabı seçilmiştir. Elde edilen sonuçlar her iki yöntem için uygundur. Her iki yöntemde düğüm nokta sayısının artması sonucun hassasiyetini arttırmaktadır. Ancak belli bir düğüm nokta sayısından ATK yönteminde sonuç değişmemektedir. Eşit olmayan düğüm nokta sayısı ile DK yöntemi eşit düğüm nokta dağılımına göre daha iyi sonuç vermektedir. Sonlu elemanlar yöntemine göre daha az düğüm sayısı ile daha hassas sonuçlar elde edilebilmiştir. Yoğunluk artınca frekans azalmakta, etki eden ön gerilme artınca ise frekans artmaktadır. Daire halkası durumunda iç çap arttıkça frekans azalmaktadır. ATK yöntemi doğrusal olmayan titreşim problemlerinde uygulanmak üzere geliştirilmektedir.

KAYNAKÇA

1. **Belmann R.E., Cast, J.** 1971. "Differential Quadratur and Long-Term Integration", Journal of Mathematical Analysis Application, 34, 235-238.
2. **Wei, G.W.** 1999. "Discrete Singular Convolution for the Solution of The FokkerPlanck Equations", Journal of Chemical Physics, 110, 8930-8942.
3. **Bert, C.W., Malik, M.** 1996. "Differential Quadrature Method in Computational Mechanics: A Review", Applied Mechanics Review, 49(1), 1-28.
4. **Civalek, Ö.** 2004. "Application of Differential Quadrature (DQ) and Harmonic Differential Quadrature (HDQ) For Buckling Analysis of Thin Isotropic Plates and Elastic Columns", Engineering Structures, 26(2), 171-186.
5. **Civalek, Ö., Ülker, M.** 2004. "Harmonic Differential Quadrature (HDQ) For Axisymmetric Bending Analysis Of Thin Isotropic Circular Plates", International Journal of Structural Engineering and Mechanics, 17(1), 1-14.
6. **Civalek, Ö., Ülker, M.** 2005. "HDQ-FD Integrated Methodology For Nonlinear Static and Dynamic Response of Doubly Curved Shallow Shells", International Journal of Structural Engineering and Mechanics, 19(5), 535-550.
7. **Wei G.W.** 1999. "Discrete Singular Convolution for the Solution of the Fokker-Planck equations" J. Chem Phys, 110, 8930-8942.
8. **Wei G.W.** 2001. "A New Algorithm For Solving Some Mechanical Problems", Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 190, 2017-2030.
9. **Civalek, Ö.** 2007. "A Parametric Study Of The Free Vibration Analysis Of Rotating Laminated Cylindrical Shells Using The Method Of Discrete Singular Convolution", Thin-Walled Structures, 45, 692-698.
10. **Civalek, Ö.** 2007. "Free Vibration And Buckling Analyses Of Composite Plates With Straight-sided Quadrilateral

- Domain Based On DSC approach”, Finite Elements in Analysis and Design,43,1013-1022.
11. **Civalek, Ö.** 2008. “Discrete Singular Convolution Method And Applications To Free Vibration Analysis Of Circular And Annular Plates”, International Journal of Structural Engineering and Mechanics, 29(2), 237-240.
 12. **Civalek Ö., Kiracioglu O.** 2007. “Discrete Singular Convolution for Free Vibration Analysis of Anisotropic Rectangular Plates”, Mathematical and Computational applications, 12(3)151-160.
 13. **Civalek Ö., Kiracioglu O.** 2007. “Numerical Approach for the Analysis Of Anisotropic Rectangular Plates Using Discrete Singular Convolution”, Asian Journal of Civil Engineering, 8(6)647-658.
 14. **Kang, S.W., Lee, J.M., Kang, Y.J.** 1999. “Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Membranes Using Non-Dimensional Dynamic Influence Function”, J. Sound Vibration, 221,117-132.
 15. **Kang, S.W., Lee, J.M.** 2000. “Application of Free Vibration Analysis of Membranes Using Non-Dimensional Dynamic Influence Function”, J. Sound Vibration, 234,455-470.
 16. **Wu, W.X., Shu, C., Wang, C.M.** 2007. “Vibration analysis of arbitrarily shaped membranes using local radial basis function-based differential quadrature method”, J. Sound Vibration, 306,252-270.
 17. **Kang, S.W., Lee, J.M.** 2004. “Free Vibration Analysis of An Unsymmetric Trapezoidal Membrane”, J. Sound Vibration, 272,450-460.
 18. **Laura, P.A.A., Bambill, D.V., Gutierrez, R.H.** 1997. “A Note On Transverse Vibrations of Circular, Annular, Composite Membranes”, J. Sound Vibration, 205(5) 692-697.
 19. **Jabareen, M., Eisenberger, M.** 2001. “Free Vibrations of Non-Homogeneous Circular and Annular Membranes”, J. Sound Vibration, 240(3)409-429.
 20. **Buchanan, G.R., Peddieson, Jr. J.** 1999. “Vibration of Circular and Annular Membranes With Variable Density”, J. Sound Vibration, 226(2)379-382.
 21. **Buchanan, G.R., Peddieson, Jr. J.** 2005. “A Finite Element in Elliptic Coordinates With Application of Membrane Vibration”, Thin-Walled Structures, 43,1444-1454.
 22. **Buchanan, G.R.** 2005. “Vibration of Circular Membranes With Linearly Varying Density Along a Diameter”, J. Sound Vibration, 280,407-414, 2005.
 23. **Casperson, L.W., Nicolet, M. A.** 1968. “Vibrations of a circular membrane”, American Journal of Physics, 36(8)669-671.
 24. **Willatzen, M.** 2002. “Exact Power Series Solutions For Axisymmetric Vibrations Of Circular and Annular Membranes With Continuously Varying Density in The General Case”, J. Sound Vibration, 258(5), 981-986.
 25. **Mei, C.** 1969. “Free Vibrations of Circular Membranes Under Arbitrary Tension by the Finite Element Method”, Journal of Acoustical Society of America, 46(3),693-700.
 26. **Özpolat, L.** 2008. “Dairesel Ve Sektör Geometriye Sahip Membrane Elemanların Serbest Titreşim Hesabı”, Yüksek Lisans Semineri, Antalya.
 27. **Oden, J.T., Sato, T.** 1967. “Finite Strains and Displacements Of Elastic Membranes By The Finite Element Method”. Int. Journal of Solids and Structures, 3,471-488.
 28. **Wang X, Wang Y.** 2004. “Re-Analysis Of Free Vibration of Annular Plates By The New Version Of Differential Quadrature Method”, J. Sound Vib. 278(3) 685-689.
 29. **R.H. Gutierrez, P.A.A. Laura, P.A.A., D.V.** 1998. “Bambill, V.A. Jederlinic, “Axisymmetric Vibrations of Solid Circular and Annular Membranes With Continuously Varying Density”, Journal of Sound and Vibration, 212(4)611-622.