İNCE LİFLER İÇEREN KOMPOZİT CİSMİN KAYMA MODÜLÜNÜN HESAPLANMASI

Osman Bulut*
Arş. Gör., İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Mekanik Ana Bilim Dalı, Maslak/İstanbul
buluto@itu.edu.tr

Necla Kadıoğlu
Prof. Dr., İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Mekanik Ana Bilim Dalı, Maslak/İstanbul
kadiog@itu.edu.tr

Şenol Ataoğlu
Doç. Dr., İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Mekanik Ana Bilim Dalı, Maslak/İstanbul
ataoglu@itu.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmanın hedefi bir matris malzemesi içinde matrise göre daha rijit ince uzun lifler bulunmasıyla oluşan bir kompozit malzemenin kayma modülünün hesaplanmasıdır. Kompozit malzeme efektif bir malzeme adı verilen tek bir homojen izotrop ve lineer elastik bir malzemeye eşdeğer kabul edilmektedir. Ayrıca, kompozit içinde liflerin birbiriyle etkileşmediği kabulü de yapılmıştır. Teorik çözümde temel mantık, kompozit ve efektif malzemede biriken şekil değiştirme işlerinin herhangi bir yükleme altında eşitliğidir. Yükleme olarak silindirik bir kompozit cisme iki ucundan sabit burulma momentlerinin etkidiği düşünülmüştür.

Sonuçta, efektif malzemenin kayma modülü, matris ve lif malzemelerinin kayma modüllerine ve lif hacim oranına bağlı olarak bulunmuştur. Hacim oranının düşük değerleri için yapılan deney sonuçları ve sonlu elemanlar analizinden elde edilen sonuçlar, teorik çözümle karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kompozit malzeme, mikromekanik, kayma modülü

Determination of Shear Modulus for Fiber Reinforced Composites

ABSTRACT

The aim of this study is to determine the shear modulus of a composite including a matrix and long, thin, unidirectional fibers being rigid relative to the matrix material. It is assumed that composite is equivalent to a unique, homogeneous, isotropic and linear material which is named as effective material. Besides, it is accepted that there is no interaction between the fibers in composite. The main idea is the equality of the strain energies accumulated in composite and the effective material under any loading. It is considered that constant torsion moments act at both ends of a composite cylinder.

At the end, the shear modulus of the effective material has been determined dependent upon the shear modulus of the matrix and the fibers and the concentration values. The results of the experiments and finite element analysis done for low concentration ratios are compared with the theoretical solution.

Keywords: Composite materials, micromechanics, shear modulus

* İletişim yazarı

Geliş tarihi : 06.11.2012
Kabul tarihi : 25.02.2013

Bulut, O., Kadıoğlu, N., Ataoğlu, Ş. 2013. "İnce Lifler İçeren Kompozit Cismin Kayma Modülünün Hesaplanması," Mühendis ve Makina, cilt 54, sayı 638, s.46-53.

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, bir malzemenin mikro yapısı seviyesinde yapılacak bir değişikliğin makro boyuttaki mekanik özelliklere ait sonuçlarının gözlenebilmesi için, bu malzemeye mikron mertebesinde çapa sahip lifler eklenerek oluşturulacak kompozitler ele alınmıştır. Kompozit malzeme üretiminde amaç, dış etkilere karşı daha dayanıksız olsa bile elde edilmesi, işlenmesi ve şekil verilmesi daha kolay olan malzemelerin, yüksek mekanik özellikli, uygun malzemelerle takviye edilerek tüm mekanik özelliklerinin ilk hallerine göre daha iyi olmalarını sağlamaktır.

Çalışma kapsamında, içerisinde mikron mertebede boyuta sahip lif bulunduran kompozit malzemelerin elastik özelliklerinden kayma modülü incelenmiştir. Ele alınan kompozitler düşük miktarda katkı maddesi içeren, böylece liflerin birbirleriyle etkileşmediği ve bu liflerin kompozit içerisinde homojen dağılım gösterdiği türdendir. Ayrıca kompozitin içerisine katılan lif malzemesinin elastik özellikleri, matris malzemesininkine göre çok daha yüksektir. Yine bu çalışma kapsamında ele alınan tüm malzemelerin, lineer-elastik, homojen ve izotrop olduğu kabul edilecektir.

Kompozitlerin mekanik özellikleri birçok çalışmaya konu olmuştur. Bunları direk, varyasyonel ve yaklaşım yöntemleri olmak üzere üç grupta toplamak mümkündür [1]. Eshelby [2], çalışmasında sonsuz bir ortama eklenen elips şeklindeki katkıdan oluşan gerilme değişimini incelemiştir. Varyasyonel yöntemle yapılan çalışmalar olan Hashin [3] ile Hashin ve Rosen [4]'in makaleleri bu çalışmada öncü olarak kabul edilmiştir. Bunlardan ilkinde parçacık içeren kompozitin elastik katsayıları için sınırlar elde edilirken ikincisinde tek tip lif içeren kompozitlerin katsayılarına ait ifadeler verilmiştir. Hill [5], iki tür izotrop malzeme içeren ve bu malzemelerin tam olarak birlikte çalıştığı kompozitleri çalışmıştır. Birden çok eklenti malzemesiyle oluşturulan kompozitlerin elastik katsayılarını Hashin ve Shtrikman [6] varyasyonel metodla incelemiştir. Bu çalışmaların yanında deneysel olarak yapılan çalışmalar da mevcuttur. Bunlar daha çok ultrasonik yöntemlerle yapılan deneylerdir ki bunlara Kriz ile Stinchcomb [7] ile Watt ve O'Connell [8]'in çalışmaları örnek gösterilebilir. Ayrıca bu sabitlerin mikromekanik ile modellenmesi için çalışmalar da mevcuttur. Buna ait örnekler olarak Mısra ve Chang [9] ile Brighenti ve Scorza [10]'nın çalışmaları gösterilebilir.

2. PROBLEMİN TANIMI

Sabitleri bilinen bir malzeme içerisine, özellikleri bilinen başka bir malzemeye ait iplikçiklerden oluşan lif formundaki eklentilerin yerleştirilmesiyle elde edilen karışım, heterojen malzeme olarak kabul isimlendirilir ki bu tarz heterojen malzemeler, bu çalışma kapsamında ele alınacak kompozit malzemelerdir. Bu heterojen malzemenin sabitlerinin her iki malzemeye ait malzeme sabitlerinden farklı olacağı açıktır.

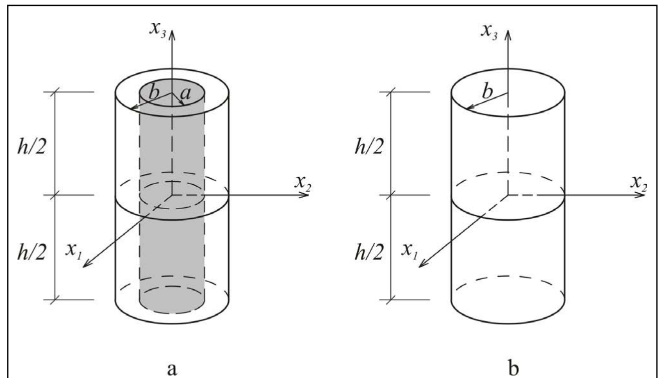
Heterojen malzemede lif yoğunluğunun uniform bir dağılım gösterdiği kabul edilirse bu heterojen malzeme, fiktif bir malzemeye eş değer olarak değerlendirilebilir. Böylece problem, bu fiktif malzemenin kayma modülünün bulunması problemi olur.

Ele alınan heterojen malzeme iki ayrı malzemeden oluşmaktadır. Bunlardan hacmin büyük kısmını oluşturan malzemeye matris, diğer malzemeye lif denilmiştir. Matris malzemesine, life ve fiktif malzemeye ait kayma modülleri sırasıyla μ^M, μ^P ve μ^*, sembolleri ile gösterilecektir. Burada matris malzemesinin elastik özellikleri, liflerin elastik özelliklerine göre düşüktür. Karışım oluşturulurken liflerin matrise göre hacim oranı küçük olsa bile, fiktif malzemenin elastik özelliklerinin matrisinkilere göre daha iyi olması beklenmektedir.

Liflerin hacim yoğunluğunun az olduğu heterojen malzeme için bu liflerin birbirleriyle etkileşmediği düşünülmektedir. Böylece, liflerin şekillerinin silindir olduğu kabulü altında, matrisin tamamını düşünmek yerine her biri silindirik formda tek iplikçik içeren tek silindirik eleman ele alınır. Bu, problemi tek bir kompozit eleman üzerinde inceleme imkanı sağlar. Bu elemanlar, temsili hacim elemanı olarak isimlendirilmektedir [3, 4]. Dolayısıyla ele alınacak problem, bahsedilen kabuller altında, basit burulma haline maruz b yarıçaplı silindirik bir matris içerisinde, bununla eş merkezli, a yarıçaplı silindirik liften oluşan kompozit malzemenin kayma modülünün bulunmasıdır.

Kompozit cisim belirli bir gerilme veya şekil değiştirme etkisi altında belirli bir davranış sergiler. Bu sebeple tek lif içeren heterojen hacim elemanı b yarıçaplı tek bir silindirik cisimle eş değerdir. Bu cisme efektif cisim denilecektir ve Şekil 1'de gösterilmiştir.

Bahsedilen kompozit malzemenin kayma modülünün belirlenebilmesi için, matris ile tek liften oluşan silindirik cismin basit burulma etkisi altında, üzerinde biriken toplam şekil de-

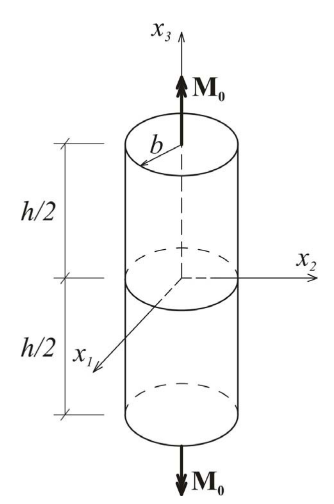


Şekil 1. (a) Lif İçeren Temsili Hacim Elemanı, (b) Efektif Cisim

ğiştirme işinin ilgili efektif cismin aynı gerilme haline maruz olması durumunda üzerinde biriken işle eşitliği kullanılacaktır.

3. SİLİNDİRİK BİR CİSMİN BASİT BURULMASI

Bu problemde, x_3 ekseni etrafında burulma momenti etkisindeki silindirik bir cisim ele alınacak ve problem silindirik koordinatlarda incelenecektir. Problemde ele alınan h yüksekliğinde, b yarıçaplı, üst ve alt yüzeylerine kendi ekseni doğrultusunda M_0 burulma momenti etkiyen silindirik cisim ile silindirik koordinat takımındaki birim vektörler Şekil 2 ve 3'te gösterilmiştir.



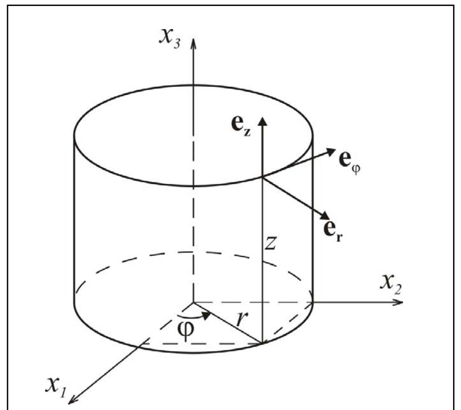
Şekil 2. M_0 Momenti Etkiyen Silindir

Gerilme tansörü τ, bu problem için silindirik koordinatlarda

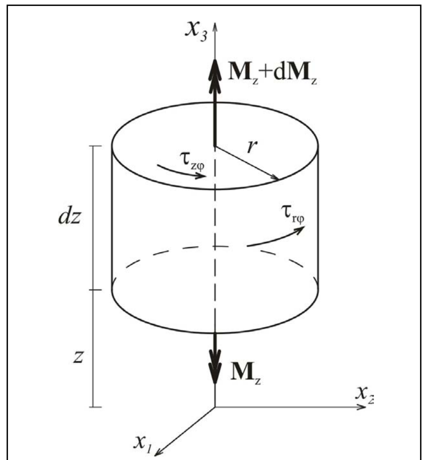
$$\tau = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{r\varphi} & 0 \\ \tau_{\varphi r} & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

şeklindedir ve problemin bütün bilinmeyenleri φ değişkeninden bağımsızdır. Sadece x_3 doğrultusunda moment söz konusu olduğundan, sonsuz küçük bir elemanda bu doğrultuda moment dengesi yazılmaya çalışılacaktır. Bunun için ekseni x_3 ekseni olan, r yarıçaplı, orijine uzaklığı z olan, dz yüksekliğinde bir eleman ve bunun üzerine etkiyen sıfırdan farklı gerilmeler göz önüne alınsın. Bu, şematik olarak Şekil 4'te gösterilmiştir.

Bu elemanın eksen koordinatları z ve $z+dz$ olan alt ve üst yüzeylerine $\tau_{z\varphi}$, r'nin sabit olduğu yan yüzeyine $\tau_{r\varphi}$ kayma gerilmeleri etkir. Elemandaki $Mz\ (r;z)$ momenti, üst yüzeydeki $\tau_{z\varphi}$ kayma gerilmelerinin etkidiği yüzeyin merkezine göre oluşturduğu momentlerin bileşkesidir. Bu yazılırsa



Şekil 3. Silindirik Koordinatlarda Birim Vektörler



Şekil 4. Silindirden Alınan Diferansiyel Hacim Elemanı

$$M_z(r,z) = 2\pi \int_0^r \tau_{z\varphi}(\xi, z)\ \xi^2 d\xi \tag{2}$$

ifadesi bulunur. Bu ifade r ye göre türetilip düzenlenirse

$$\tau_{z\varphi}(r,z) = \frac{1}{2\pi r^2} \frac{\partial M_z}{\partial r} \tag{3}$$

eşitliği elde edilir.

Eleman üzerindeki momentin z doğrultusundaki değişimi de varsayılacağından, elemanın bu doğrultudaki moment dengesi yazılırsa diğer gerilme bileşeni

$$\tau_{r\varphi}(r,z) = -\frac{1}{2\pi r^2} \frac{\partial M_z}{\partial z} \tag{4}$$

olarak elde edilir.

Silindirik koordinatlarda şekil değiştirme bileşenleri ile yer değiştirme bileşenleri arasındaki bağıntılar, problemde sadece u_φ *(r;z)* yer değiştirme bileşeninin sıfırdan farklı olduğu düşünülerek olarak yazılır. Burada $\gamma_{r\varphi}$ ve $\gamma_{z\varphi}$ kayma açılarıdır ve bunun

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rz} = 0 \tag{5}$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{r\varphi} \tag{6}$$

$$\varepsilon_{z\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{z\varphi} \tag{7}$$

üçüncü bileşeni olan γ_{rz} sıfırdır. Sıfırdan farklı gerilme bileşenleri ise Hooke bağıntısından

$$\tau_{z\varphi} = \mu\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right), \tau_{r\varphi} = \mu\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right) \tag{8}$$

olarak elde edilirler [11]. (3) ve (4) denklemleri sırasıyla (8) ifadesine eşitlenirse ve elde edilen eşitliklerden ilki r, ikincisi z değişkenine göre türetilip u_φ yer değiştirme bileşeni denklemlerde yok edilirse, elemana etkiyen burulma momenti için

$$\frac{\partial^2 M_z}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial M_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 M_z}{\partial z^2} = 0 \tag{9}$$

diferansiyel denklemi bulunur. B bir sabiti göstermek üzere, M=B bu denklemin bir çözümüdür. Bu denklemin diğer çözümü için

$$z = R cos\theta, r = R sin\theta, \varphi = \varphi' \tag{10}$$

şeklinde (R,θ, φ') küresel koordinatlara geçilirse (9) denklemi

$$\frac{\partial^2 M_z}{\partial R^2} - \frac{2}{R}\frac{\partial M_z}{\partial R} - \frac{3 cot\theta}{R^2}\frac{\partial M_z}{\partial\theta} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 M_z}{\partial\theta^2} = 0 \tag{11}$$

şekline gelir [12]. Bu denklemin çözümünün

$$M_z = R^n M_n, (n = 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

şeklinde bir seri olduğu varsayılabilir. Buradaki M_n,

$$\frac{\partial^2 M_n}{\partial\theta^2} - 3 cot\ \theta \frac{\partial M_n}{\partial\theta} + n(n-3) M_n = 0 \tag{13}$$

denklemini sağlar. Burada

$$M_n = F_n sin^2\theta \tag{14}$$

dönüşümü yapılır ve denklem düzenlenirse

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial\theta^2} - \frac{\partial F_n}{\partial\theta}\frac{cos\theta}{sin\theta} + F_n\left(-2 - 4\frac{cos^2\theta}{sin^2\theta} + n(n-3)\right) = 0 \tag{15}$$

eşitliği elde edilir. Burada $v=cos\theta$ dönüşümü yapılır ve (15) denkleminde yerine konulursa

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial\theta^2}\ \left(1 - v^2\right) - 2v\frac{\partial F_n}{\partial\theta} + F_n\ \left((n-1)(n-2) - \frac{4}{1-v^2}\right) = 0 \tag{16}$$

denklemi bulunur. Bu, mertebesi iki olan (n-2). dereceden Legendre polinomudur ve buradaki F_n için birinci tip çözüm, P_{n-2}^2 ile gösterilip

$$P_{n-2}^2 = \left(1 - v^2\right)\ \frac{d^2}{dv^2}\ \left(P_{n-2}\right), n - 2 \geq 2 \tag{17}$$

şeklinde hesaplanır [13]. n=4 için alınacak tek terim denklemi sağlar. Dolayısıyla (14) ifadesinden M_4 elde edilerek v yerine yeniden $cos\theta$ yazılıp (10) dönüşümü ile geri dönülürek (12) denklemi bir C integral sabiti de kullanılarak yazılırsa

$$M_z = CR^4 sin^4\ \theta + B = Cr^4 + B \tag{18}$$

bulunur. Burada ikinci tip çözüm logaritmik olduğu için hesaba katılmamıştır. Ayrıca r = 0 için M_z sıfır olacağından B sabiti sıfırdır.

Ele alınan silindirin alt ve üst yüzeylerine etkiyen M_0 burulma momentinin birim alana düşen miktarına m denilsin. Bu,

$$M_0 = m\pi b^2 \tag{19}$$

şeklinde yazılır. (18)'de verilen M_z ifadesi r=b için M_0'ı verecektir. Buradan bilinmeyen katsayı

$$Cb^4 = m\pi b^2 \rightarrow C = \frac{m\pi}{b^2} \tag{20}$$

olarak bulunur. Böylece ilgili kayma gerilmesi bileşenleri (3) ve (4) denklemleri kullanılarak

$$\tau_{z\varphi} = \frac{2mr}{b^2},\ \tau_{r\varphi} = 0 \tag{21}$$

ve sıfırdan farklı kayma açısı bileşeni Hooke bağıntısından

$$\gamma_{z\varphi} = \frac{2mr}{b^2} \tag{22}$$

olarak elde edilir. Silindirde biriken toplam şekil değiştirme işi ise

$$U = \frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{b}\int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{z\varphi}\gamma_{z\varphi}\ r dr d\varphi dz \tag{23}$$

hacim integralinin hesabı ile

$$U = \frac{\pi h m^2}{\mu} \tag{24}$$

şeklinde hesaplanır.

4. TEK İNCE LİF İÇEREN SİLİNDİRİK BİR CİSMİN BASİT BURULMASI

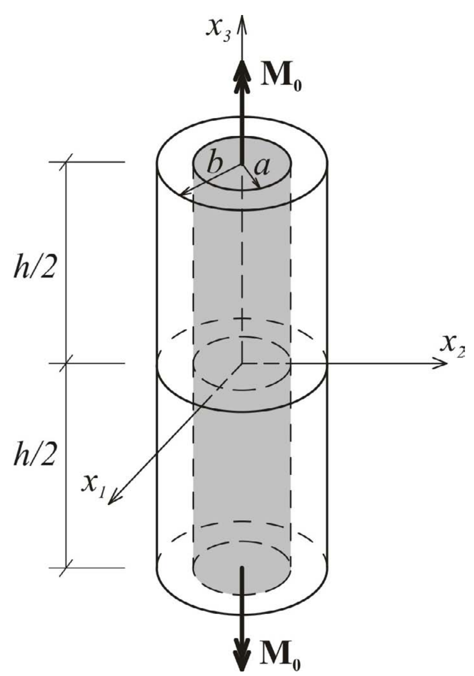
Şimdi eksenleri ve uzunlukları aynı, farklı malzemeden yapılmış, Şekil 5'te gösterilen birlikte çalışan iç içe iki silindirde aynı problem ele alınacaktır.

Bu, aslında içerisinde tek doğrultuda yönlendirilmiş, birbirlerine paralel, ince lifler içeren kompozit malzemeden alınan temsili hacim elemanıdır. İçteki silindirik parçanın lif, bunun etrafını kaplayan kısmın ise matris olduğu düşünülmektedir. Burada bir kesitte içteki silindirin taşıdığı burulma momenti M^P, dıştaki matrisin taşıdığı burulma momenti M^M ile, bunlara ait gerilmelerse sırasıyla τ^P ve τ^M ile gösterilecektir. Yine üzerinde *P* indisi bulunan katsayılar içteki, *M* indisi bulunanlar ise dıştaki malzemeye aittir.

İçteki silindirin aldığı M^P momenti ve sıfırdan farklı gerilme bileşeni $\tau^P_{z\varphi}$; (3), (7) ve (18) ifadeleri kullanılarak,

$$M^P(r,z) = C^P r^4, (0 \le r \le a) \tag{25}$$

$$\tau^P_{z\varphi}(r,z) = \mu^P \gamma^P_{z\varphi} = \frac{2C^P r}{\pi} \tag{26}$$



Şekil 5. Burulma Momentine Maruz Silindirik Temsili Hacim Elemanı

olarak yazılırken içi boş olan dıştaki silindirde bu değerler

$$M^M(r,z) = C^M r^4 + B^M, (a \le r \le b) \tag{27}$$

$$\tau^M_{z\varphi}(r,z) = \mu^M \gamma^M_{z\varphi} = \frac{2C^M r}{\pi} \tag{28}$$

şeklinde elde edilirler. Bu kayma gerilmelerinin bileşkesi $M_o = m\pi b^2$ momentini verecektir. Bu yazılırsa

$$\int_0^a 2\pi\tau^P_{z\varphi} r^2 dr + \int_a^b 2\pi\tau^M_{z\varphi} r^2 dr = M_0 \tag{29}$$

eşitliğinden

$$C^P a^4 + C^M \left(b^4 - a^4\right) = M_0 \tag{30}$$

denklemi elde edilir. (26) ve (28)'de bulunan gerilme ifadeleri (8) denklemine yerleştirilirse sırasıyla

$$\tau^P_{z\varphi} = \frac{2C^P r}{\pi} = \mu^P \frac{\partial u^P_\varphi}{\partial z} \tag{31}$$

$$\tau^M_{z\varphi} = \frac{2C^M r}{\pi} = \mu^M \frac{\partial u^M_\varphi}{\partial z} \tag{32}$$

denklemleri elde edilir. Buradan yer değiştirmeler hesaplanıp $z = 0$'da yer değiştirmelerin sıfır olması gerektiğinden dolayı bu fonksiyonların sadece *z*'nin fonksiyonları olduğunu görerek $r = a$'da matris ve lifin yer değiştirme bileşeni eşitlenirse

$$\frac{C^P}{C^M} = \frac{\mu^P}{\mu^M} \tag{33}$$

bulunur. (30) ve (33) denkleminden katsayılar

$$C^P = \frac{M_0 \mu^P}{\mu^P a^4 + \mu^M \left(b^4 - a^4\right)} \tag{34}$$

$$C^M = \frac{M_0 \mu^M}{\mu^P a^4 + \mu^M \left(b^4 - a^4\right)} \tag{35}$$

olarak elde edilir. İç içe iki silindirden oluşan cisimde biriken toplam şekil değiştirme işi

$$U = \pi h \left[\int_0^a \tau^P_{z\varphi}\gamma^P_{z\varphi} dr + \int_a^b \tau^M_{z\varphi}\gamma^M_{z\varphi} dr\right] \tag{36}$$

denkleminden (26), (28), (34) ve (35) denklemleri kullanılarak

$$U = \frac{b^4 m^2 \pi h}{a^4\left(\mu^P - \mu^M\right) + b^4 \mu^M} \tag{37}$$

şeklinde hesaplanır.

5. EFEKTİF KAYMA MODÜLÜNÜN HESAPLANMASI VE SONUÇLAR

Efektif cisim, bir önceki bölümde ele alınan kompozit silindirik cisme eş değer bir silindirik cisimdir. Dolayısıyla yukarıda çözülen burulma momentine maruz bir silindirde hesaplanan toplam şekil değiştirme işinin ifadesi efektif cisim için kayma modülü efektif olanıyla değiştirilerek aynen kullanılır. Dolayısıyla efektif cisimde iş denklem (24)'de verilen ifadede μ yerine μ^* konularak elde edilir. Bununla temsili hacim elemanı için hesaplanan ve denklem (37)'de verilen iş ifadesi eşitlenirse ve buradan μ^* çekilirse

$$\frac{1}{\mu^*} = \frac{b^4}{a^4\mu^P + \left(b^4 - a^4\right)\mu^M} \tag{38}$$

bağıntısı bulunur. İç içe iki silindirik malzemeden oluşan kompozit malzemede hacim oranı *c*

$$c = \frac{a^2}{b^2} \rightarrow a^2 = cb^2 \tag{39}$$

şeklinde tanımlanarak denklem (38) düzenlenirse

$$\mu^* = \mu^P c^2 + \mu^M \left(1 - c^2\right) \tag{40}$$

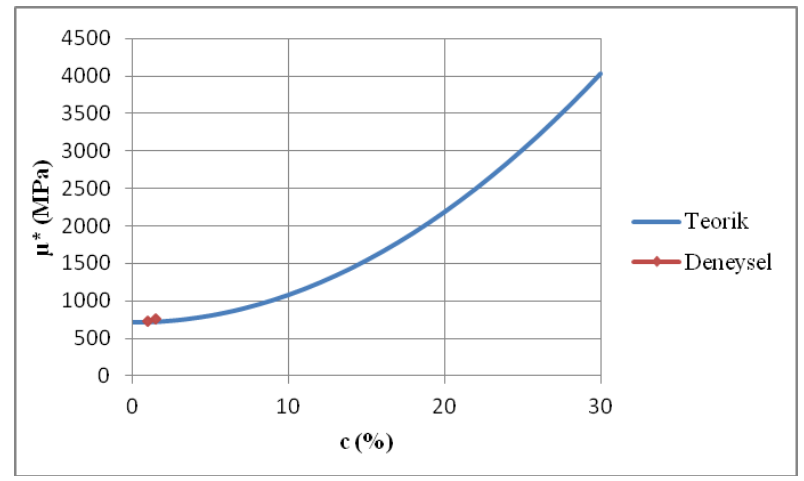
olarak efektif malzemenin veya ince lif içeren kompozitin kayma modülü hesaplanmış olur.

5.1 Deneysel ve Sayısal Sonuçlar ve Karşılaştırma

Matris ve lif malzemesi olarak kayma modülleri sırasıyla

$$\mu^M = 716.535 \times 10^6\, Pa \tag{41}$$

$$\mu^P = 37593.98 \times 10^6\, Pa \tag{42}$$



Şekil 6. Efektif Kayma Modülünün Hacim Oranıyla Değişimi

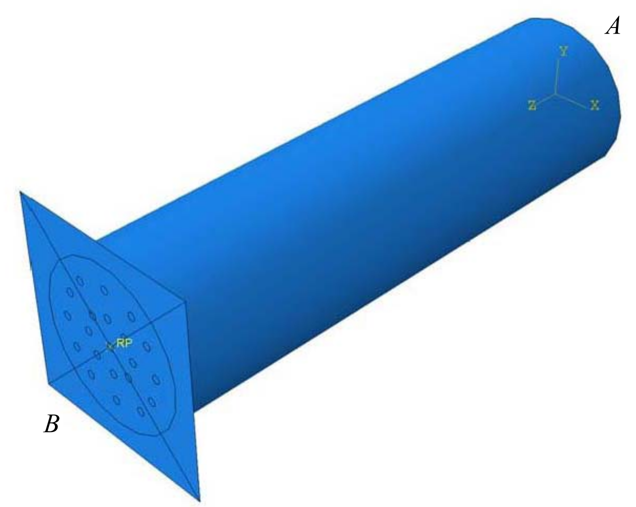
olan polyester ve kevlar kullanılmıştır. Bu durumda denklem (40)'da verilen denklem kullanılarak efektif cismin kayma modülünün hacim oranı c'ye bağlı değişimi Şekil 6'da çizilmiştir. Ayrıca bu malzemelerle elde edilen kompozitin kayma modülleri lifin %1 ve %1.5 hacim oranı için sırasıyla 733.04 MPa ve 756.46 MPa olarak ölçülmüş ve grafikte gösterilmiştir. Yapılan deneysel çalışma detayları, Bulut, 2013'te bulunabilir [14].

Bu grafikte teğetinin eğimi gittikçe artan bir eğri görülmektedir. Bu, Kevlar'ın kayma modülünün polyestere nazaran çok daha büyük olmasından dolayıdır. Düşük hacim oranlarında az da olsa kayma modülünde bir artış meydana gelmektedir. Hacim oranı arttıkça kayma modülü ciddi oranda artmaktadır.

Sayısal modelleme için Abaqus adlı sonlu eleman yöntemiyle çözümleme yapan program kullanılmıştır. Model deneysel çalışmadakine uygun olarak silindirik bir matrisin içerisine silindirik lifler eklenerek elde edilmiştir. Kompozitin dış çapı 20 mm olarak alınmıştır. Başlangıçta deneyde kullanılan boyutlara uygun olarak kompozitin toplam boyu 200 mm olarak seçilmiştir. Ancak gerilme ve şekil değiştirme dağılımının modelin neredeyse tamamında uniform dağılım göstermesi ve hacim oranı arttıkça analizde kullanılan ağ eleman sayısının çok fazla olarak çözümün daha ileri donanımlı bilgisayarlar gerektirmesinden dolayı boy 70 mm olarak revize edilmiş; bu boyda yapılacak analizin hatalı olmayacağını görmek amacıyla önceki boyla yapılan bazı analizler, bu boy için tekrarlanarak aynı sonuçlar elde edilmiştir. Lifler, yine deneydekine uygun olarak çapı 1 mm olan silindirik lif demetleri halinde modellenmiştir. Modelin bir ucu tam ankastre olarak bağlanmış, diğer ucuna tam olarak yapıştırılan rijit levhanın tam ortasından eksenel tekil çekme yükü uygulanmıştır. Analiz sonucunda uygun noktalardan elde edilen kuvvet doğrultusundaki gerilme ve şekil değiştirme ile buna dik doğrultudaki şekil değiştirme kullanılarak elastisite modülü ve Poisson oranı hesaplanmıştır. Bunlar kullanılarak da kompozitin bu çalışmada elde edilen elastik katsayısı olan lif doğrultusuna dik düzlemdeki kayma modülü hesaplanmıştır. Bu işlemler farklı hacim oranları için tekrarlanmıştır. Burada sadece %5.25'lik hacim oranına sahip kompozitin modellenmesi anlatılacaktır.

Tüm modellerde olduğu gibi bu hacim oranı için de lif demetlerinin yerleşimi, en düzgün dağılımı ve birbirleriyle en az etkileşimi gösterecek şekilde seçilmiştir. %5.25'lik hacim oranı için 21 adet lif demeti kullanılmıştır (Şekil 7).

Modelde matris ve lifler üç boyutlu, deforme olabilen katı cisim olarak ekstrüzyon yöntemiyle oluşturulmuştur. Rijit plak, ayrıklaştırılmış rijit (discrete rigid) plaktır. Deneydekiyle aynı olarak

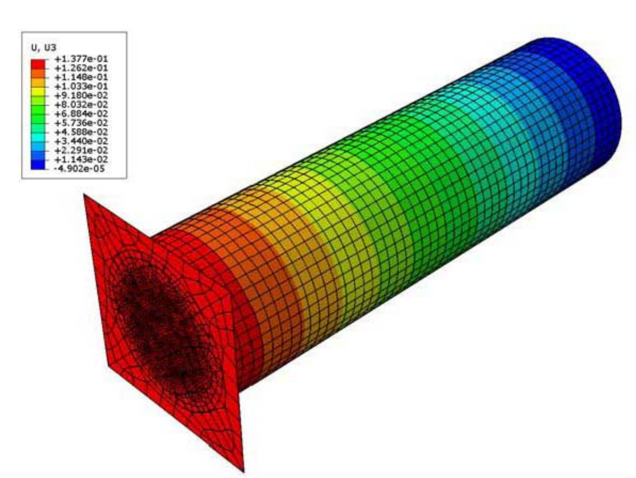


Şekil 7. Abaqus'de %5.25 Hacim Oranında Hazırlanan Kompozit Model

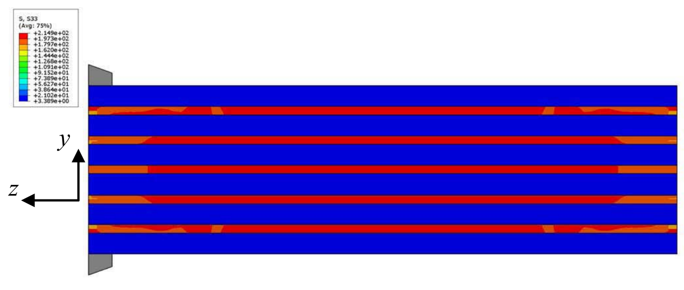
matris ve lifler için sırasıyla elastisite modülü 1820 MPa ve 100000 MPa, Poisson oranı 0.27 ve 0.33 olarak alınmıştır. Kesitler homojen katı cisim olarak atanmıştır. Lifler temas ettikleri matris yüzeylerine ve rijit plak kompozitin üst yüzeyine tam olarak bağlanmıştır. Bu sebeple yükleme sırasında ayrılma engellenmiştir. Modelin A ucu tam ankastre olarak bağlanmıştır. B ucundaki rijit plağın orta noktasından 4000 N tekil çekme yükü lineer artımla uygulanmıştır.

Modelin mesh ağı için C3D8R lineer elemanı kullanılmıştır. Toplamda 96046 nokta ve 82524 ağ elemanı mevcuttur. Analiz sonucu elde edilen eksenel doğrultuda yer değiştirme ve gerilme dağılımı sırasıyla Şekil 8 ve 9'da verilmiştir. Burada gerilme dağılımı kompozitin *yz* düzlemindeki orta düzlemde verilmiştir.

Analiz sonunda seçilen uygun noktalardan alınan değerlerin ortalamasıyla kompozitin elastisite modülü 1903.51 MPa ve Poisson oranı 0.215 olarak bulunmuştur.



Şekil 8. Eksenel Doğrultuda Yer Değiştirme Dağılımı



Şekil 9. Orta Düzlemde *z* Doğrultusundaki Gerilme Dağılımı

Aynı işlem içinde hiç lif olmayan model ve %1, %1.25, %2.25 ve %4.25 hacim oranlarında lifler içeren modeller için tekrarlanmıştır. Kayma modülü, elastisite modülü ve Poisson oranına

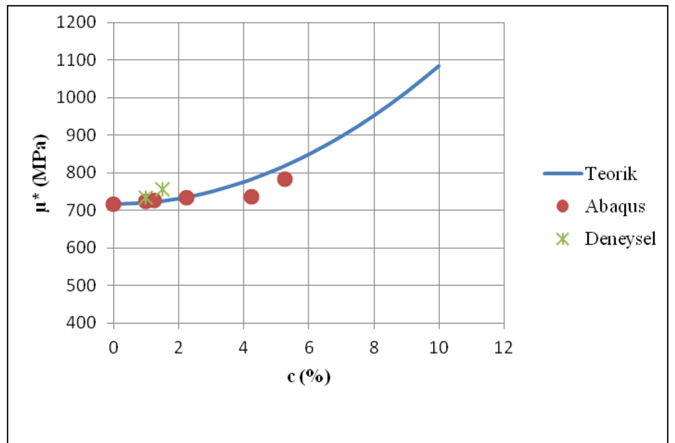
$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (43)$$

şeklinde bağlıdır. Bu bağıntı kullanılarak elde edilen sonuçlar toplu olarak aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Bu sonuçlar ile (40) denkleminde elde edilen teorik çözümden bulunan sonuçların daha iyi görülebilmesi için kayma modülünün hacim oranının %0 ile %10 aralığındaki değişimi çizilmiştir (Şekil 10). Bu şekildeki grafikten de görüleceği üzere düşük hacim oranları için bu çalışmada elde edilen basit denklem iyi sonuç vermektedir.

Tablo 1. Abaqus ile Yapılan Sonlu Elemanlar Analizinden Elde Edilen ve Teorik Sonuçlar; μ^*_n Abaqus'den, μ^*_t Teoriden Elde Edilen Sonuçlardır

c (%)	E (MPa)	ν	μ^*_n	μ^*_t
0	1820	0.27	716.535	716.535
1	1833.472	0.267	723.548	720.223
1.25	1835.748	0.265	725.592	722.298
2.25	1848.3	0.26	733.452	735.205
4.25	1850.6	0.258	735.532	783.145
5.25	1903.51	0.215	783.337	818.179



Şekil 10. Sonuçların Karşılaştırılması

Sonuç olarak, burada yapılan kabullere uygun olması koşuluyla elde edilen (40) denklemi kullanılarak bahsedilen türde kompozitlerin kayma modülleri, bunu oluşturan matris ve lifin kayma modülleri bilindiğinde hesaplanabilmektedir. Ancak burada tekrar vurgulanmalıdır ki lifler birbirleriyle etkileşmemektedirler. Dolayısıyla hacim oranının düşük olduğu durumlarda bu bağıntı daha doğru sonuç verecektir.

SEMBOLLER

a, b	yarıçaplar
B, C	sabit katsayılar
C	hacim oranı
e_r, e_φ, e_z	silindirik koordinatlarda birim normal vektörler
E	Elastisite modülü
H	yükseklik
m	M_0 burulma momentinin birim alana düşen miktarı
M_0	burulma vektörü
M^P, M^M	lifin ve matrisin taşıdığı burulma momenti
$M_z\,(r,z)$	*r* ve *z* ye bağlı moment fonksiyonu
P^2_{n-2}	birinci tip çözüm
$r,\ \varphi,\ z$	silindirik koordinatlar
r, θ, φ	küresel koordinatlar
u	yer değiştirme vektörü
$u_r,\ u_\varphi,\ u_z$	yer değiştirme vektörünün silindirik koordinatlarda bileşenleri
x_1, x_2, x_3	kartezyen koordinatlar
$\gamma_{r\varphi}, \gamma_{z\varphi}, \gamma_{rz}$	ayma açılarının bileşenleri
μ^M	matris malzemesine ait kayma modülü
μ^P	life ait kayma modülü
μ^*	fiktif malzemeye ait kayma modülü
ν	Poisson oranı
τ	kayma gerilmesi tansörü
$\tau_{r\varphi}$	kayma gerilmesi tansörünün bileşeni
τ^P, τ^M	lifin ve matrisin taşıdığı kayma gerilmeleri

TEŞEKKÜR

Bu makale Bulut [14]'un doktora tezinden faydalanılmıştır. Yazarlar, çalışmadaki maddi desteklerinden dolayı TÜBİTAK ve İstanbul Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi'ne, ayrıca deneysel çalışmalardaki yardımlarından dolayı Marmara Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Tekstil Eğitimi Bölümü'nden Araş. Gör. Dr. Metin Yüksek ve Araş. Gör. Erhan Sancak ile Marmara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Metalurji ve Malzeme Mühendisliği Bölümü'nden Araş. Gör. İsmail Topçu'ya teşekkür eder.

KAYNAKÇA

1. **Hashin, Z.** 1983. "Analysis of Composite Materials - A Survey," Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME, vol: 50, no: 3, p. 481-505.
2. **Eshelby, J.D.** 1957. "The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems," Proceedings of the Royal Society, vol. 241, p. 376-396.
3. **Hashin, Z.** 1962. "The Elastic Moduli of Heteregeneous Materials," Journal of Applied Mechanics, vol: 29, p. 143-150.
4. **Hashin, Z., Rosen, R. W.** 1964. "The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials," Journal of Applied Mechanics, vol: 31, p. 223-232.
5. **Hill, R.** 1963. "Elastic Properties of Reinforced Solids," Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol: 11, p. 357-372.
6. **Hashin, Z., Shtrikman, S. A.** 1963. "A Variational Approach to the Theory of Elastic Behavior of Multiphase Materials," Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol: 11, p. 127-140.
7. **Kriz, R. D., Stinchcomb, W. W.** 1979. "Elastic Moduli of Transversely Isotropic Graphite Fibers and Their Composites," Experimental Mechanics, vol: 19, no: 2, p. 41-49.
8. **Watt, J. P., O'Connell, R. J.** 1980. "An Experimental Investigation of the Hashin-Shtrikman Bounds on Two-phase Aggregate Elastic Properties," Physics of the Earth and Planetary Interiors, vol: 21, p. 359-370.
9. **Mısra, A., Chang, C.S.** 1993. "Effective Elastic Moduli of Heterogeneous Granular Solids," International Journal of Solids and Structures, vol: 30, no: 18, p. 2547-2566.
10. **Brighenti, R., Scorza, D.** 2012. "A Micromechanical Model for Statistically Unidirectional and Randomly Distributed fibre-Reinforced Solids," Mathematics and Mechanics of Solids, vol: 17, no: 8, p. 876-893.
11. **Sadd, M.H.** 2005. Elasticity: Theory, Applications, and Numerics, Elsevier, USA, p. 27-64
12. **Moon, P., Spencer, D.E.** 1961. Field Theory Handbook, Springer-Verlag, Berlin, Germany, p.11-14
13. **Barber, J.R.** 2004. Elasticity, Academic-Publishers, New York, USA, p. 341-345
14. **Bulut, O.** 2013 (sunulacak). Elastisite Teorisi Denklemlerinin Mikromekaniğe Uygulanması (Doktora Tezi). İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul