

BİR AKTİF SÜSPANSİYON SİSTEMİ İÇİN H_{∞} KONTROL TEMELİNE DAYALI DOĞRUSAL OLMAYAN KONTROLCÜ TASARIMI

Cem ONAT, İsmail YÜKSEK

Yıldız Teknik Üniversitesi, Makina Fakültesi, Makina Mühendisliği Bölümü

Selim SIVRIOĞLU

Gebze Yüksek Teknolojisi Enstitüsü, Enerji Sistemleri Mühendisliği Bölümü

ÖZET

Taşıt titreşimlerinin kontrolü konusunda sürüş konforu ile süspansiyon sapma aralığı performans kriterleri arasındaki çatışma eğilimi iyi bilinmektedir. Lineer metotlar kullanılarak tasarlanan aktif süspansiyon kontrolcüleri bu çatışma eğilimindeki performans kriterleri arasında sadece bir ödünleşme sunarlar. Söz konusu performans kriterlerinin her ikisine birden ancak bir non-lineer kontrolcü kullanılarak odaklanılabilir. Bu makalede bir çeyrek taşıt süspansiyon modeli için H_{∞} kontrol temeline dayalı bir non-lineer kontrolcü kullanılarak odaklanabilir. Bu makalede bir çeyrek taşıt süspansiyon modeli için H_{∞} kontrol temeline dayalı bir non-lineer kontrolcü tasarlanmıştır. Süspansiyon sapma aralığının süspansiyon sınırlarına yaklaştığında sertleşen aktif süspansiyonu tasarlamak için parametreye bağlı ağırlık fonksiyonları kullanılmıştır. Hem frekans hem de zaman tanım kümesinde yapılan simülasyonlar, önerilen non-lineer kontrolcü kullanılarak üretilecek bir aktif süspansiyon sisteminin üstün performans sergileyeceğini göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Taşıt titreşimleri, otomotiv, non-lineer kontrol, aktif süspansiyon

ABSTRACT

It is well known that being conflicting tendency between ride comfort and suspension deflection on subject of control of vehicle vibrations. Active suspension controllers that are designed by using linear methods represent only a tradeoff between these performance metrics that are conflicting tendency. It can be focused these performance metrics only by employing a nonlinear controller. In this paper a H_{∞} control based nonlinear controller is designed for a quarter car model. Parameter dependent weighting functions are used to design such an active suspension that stiffens as the suspension deflection is reaching to suspension limits. Simulations which done in both time domain and frequency domain show that the active suspension system producing by using the proposed nonlinear controller display a superior performance.

Keywords: Vehicle vibrations, automotive, nonlinear control, active suspension

Giriş

Taşıt gövdesi ve tekerlek arasına bir yay ve sönüm elemanı yerleştirilerek oluşturulan pasif süspansiyon sistemleri sürüş konforu, süspansiyon sapması ve yol tutuşu performans kriterleri arasında bir ödünleşme sunarlar. Taşıt titreşimleri değerlendirilirken ele alınan bu üç önemli performans kriterlerinden sürüş konforu ile süspansiyon sapması birbirine ilişkilidir. Zira uygulamada taşıtların yapısal özelliklerinden dolayı, süspansiyon stroğu belirli değerlerde sınırlıdır. Bunun için süspansiyon sapmasının bu değerlere ulaşması taşıtta kırılmalara ve sürüş konforu kaybına sebep olmaktadır.

Tekerlekle taşıt gövdesi arasına geri bildirimle kontrol edilebilen bir hidrolik eyleyici yerleştirilmesiyle meydana getirilen aktif süspansiyon sistemleri için lineer kontrol

metotları kullanılarak tasarlanan süspansiyon kontrolcüleri de çatışma eğilimindeki sürüş konforu ve süspansiyon sapması performans kriterleri arasında ödünleşmeye giderler. Şimdiye dek başta PID kontrol [1,2], LQR kontrol [3,4], H_{∞} kontrol [5-7] vb. kontrol metotları olmak üzere birçok lineer kontrol kanunları aktif taşıt süspansiyonlarına başarıyla uygulanmıştır. Ancak lineer kontrol metotlarıyla tasarlanan bir kontrolcünün birden fazla performans kriterine ayrı ayrı odaklanma yetisi yoktur. Bir başka deyişle lineer kontrol metotları kullanılarak tasarlanmış bir aktif süspansiyon kontrolcüsü, sürüş konforu ve süspansiyon sapması performans kriterleri arasında ancak bir ödünleşme sunabilir [8,9]. Hem sürüş konforu hem de süspansiyon sapması performans ölçütüne odaklanma amacına sadece

non-lineer (doğrusal olmayan) kontrolcüler kullanılarak ulaşılabılır [8].

Bu makalede konfor problemine odaklanılarak bir çeyrek taşıt süspansiyon modeli ele alınarak H_{∞} kontrol temeline dayalı bir non-lineer kontrolcü tasarlanmıştır. Taşıtın süspansiyon stroğunun ± 8 cm olduğu varsayılmıştır. Non-lineer kontrolcüye süspansiyon sapması ve taşıt gövdesinin düşey hızı geri beslenmiştir. Tasarlanan kontrolcü normal yol şartlarında, süspansiyon sapması değerleri sınır değerlerinden uzaktayken, taşıt gövdesinin ivmelenmesinin minimizasyonuna odaklanmaktadır. Süspansiyon sapmasının sınırlara yaklaştığı çok kötü yol şartlarında ise bu defa süspansiyon sapmasının minimizasyonuna odaklanmaktadır. Hem frekans hem de zaman tanım kümesinde (ortamında) yapılan simülasyonlar, önerilen non-lineer kontrolcü kullanılarak üretilen bir aktif süspansiyon sisteminin üstün performans sergileyeceğini göstermektedir.

ÇEYREK TAŞIT SÜSPANSİYON MODELİ VE ÖDÜNLEŞMELER

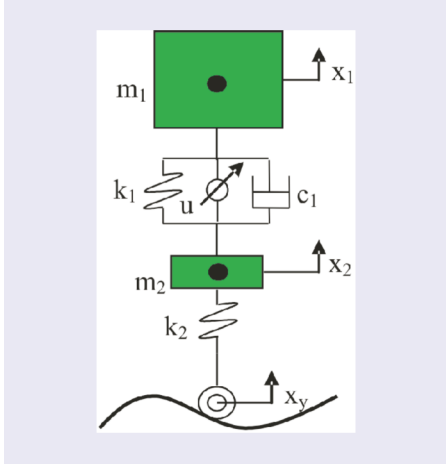
Şekil 1'de gösterilen çeyrek taşıt modelinde, taşıtın gövdesi (yaylanmalı kütle) tek serbestlik dereceli bir kütle olarak, dört adet aks ise yine tek serbestlik dereceli ayrı bir kütle (yaylanmasız kütle) olarak düşünülmüştür. Burada m_1 , taşıt gövdesinin kütleini; k_1 , süspansiyon sisteminin yay sabitini; c_1 , süspansiyon sisteminin sönüm sabitini; m_2 , aksların kütleini; k_2 , tekerleğin yay sabitini; x_y , yol yüzeyini; u ise m_1 ve m_2 kütlelerinin arasına yerleştirilmiş kontrol elemanı tarafından sisteme etkileyen kontrol kuvvetini göstermektedir. Sisteme ait hareket denklemleri ve bunların durum uzay formundaki ifadeleri sırasıyla ek bölümünde verilmiştir. Sistemin durumları sırasıyla, süspansiyon sapması (x_1-x_2), tekerlek sapması (x_1-x_y), gövdenin hızı (dx_1/dt) ve aks kütleinin hızıdır (dx_2/dt).

Literatürde yaygın olarak, seyir konforunun taşıt

gövdesinin düşey ivmelenmesiyle ilişkili olduğu kabul edilmektedir. Seyir konforunu iyileştirmek için yol bozucusu girişinden taşıt gövdesinin düşey ivmelenmesine olan transfer fonksiyonunu 0-65 rad/s frekans aralığında bastırmak gerekmektedir. Bu noktada, konfor için gerekli olan taşıt gövdesinin düşey ivmelenmesi minimize edilirken pratikte taşıtların yapısal özellikleri sebebiyle süspansiyon stroğunun belirli bir değerde olması gerçeği de göz önüne alınmalıdır. Pratikte bu değer aşıldığında sadece seyir konforu kaybına değil aynı zamanda taşıtın yıpranmasına da sebep olmaktadır. Bu yüzden sürüş konforuna odaklanılarak kontrol dizayn etmek için yol bozucusu girişinden süspansiyon sapma aralığına olan transfer fonksiyonu da göz önüne alınmalıdır.

Şekil 1'deki iki serbestlik dereceli çeyrek taşıt modeli göz önüne alınırsa; bozucu yol girişinden taşıtın gövdesinin düşey ivmelenmesine olan transfer fonksiyonu $\omega_1 = \sqrt{k_2/m_2}$ frekansında değişmez bir noktaya sahiptir [8]. Kontrol tasarımı bakış açısıyla bu durum; kontrol girişinden (u) ivmelenmeye olan transfer fonksiyonu $G_a(s) = \ddot{x}_1/u$ nun ω_1 frekansında sıfırı olduğu anlamına gelmektedir. Tablo 1.'deki değerler için $\omega_1 = 64.5$ rad/s dir. Benzer şekilde yol bozucu girişinden süspansiyon sapma aralığına olan transfer fonksiyonu $G_{sd}(s) = (x_1 - x_2)/u$ da $\omega_2 = \sqrt{k_2/(m_2 + m_1)}$ frekansında değişmez bir noktası vardır. Bu durumda kontrol girişinden süspansiyon sapmasına olan transfer fonksiyonunun $\omega_2 = 21.1$ rad/s frekansında sıfırı olduğuna işaret etmektedir. Sistem sınırlarının kontrol performansı üzerindeki sınırlayıcı etkisi düşünüldüğünde lineer bir kontrolcü söz konusu iki performans kriterini eş zamanlı olarak konfor için gerekli olan düşük frekans bölgesinde minimize edemez [10]. Nitekim [11]'de lineer bir kontrolcü kullanılarak düşük frekans bölgelerinde taşıt gövdesinin düşey ivmelenmesinde küçük bir azaltmanın $\sqrt{k_2/m_2}$ Frekansında süspansiyon sapma aralığında büyük artışlara yol açacağı gösterilmiştir. Lineer metotlar kullanılarak tasarlanan aktif süspansiyon kontrolcülerini söz

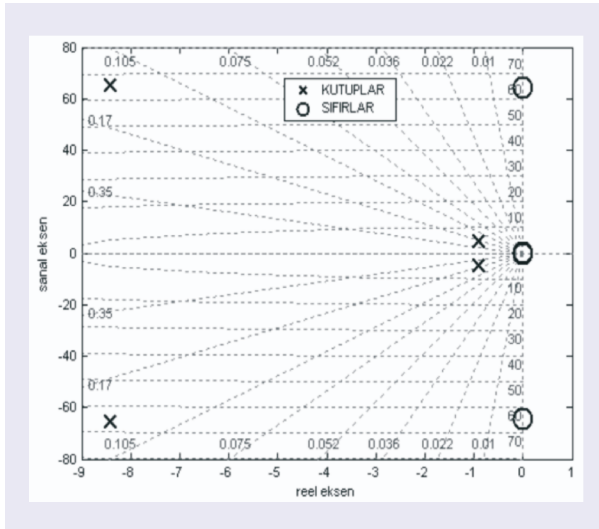
konusu iki performans kriteri arasında bu şekilde bir ödünleştirme eğilimindedirler [8]. Şekil 2. Ve Şekil 3.'de sırasıyla $G_o(s)$ ve $G_{sd}(s)$ transfer fonksiyonlarının kutup ve sıfır haritaları verilmektedir.



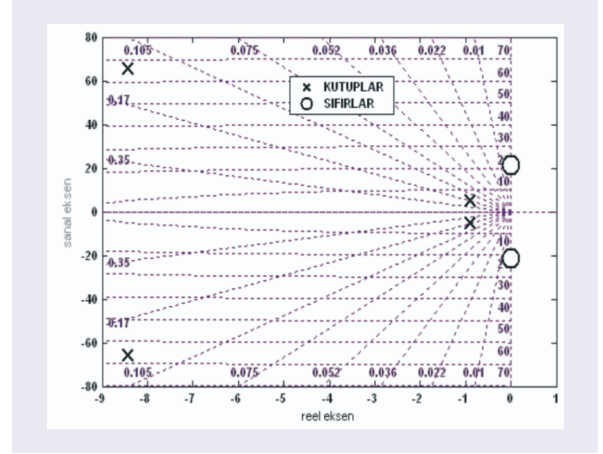
Şekil 1. Çeyrek Taşıt Modeli

Tablo 1. Simülasyon Parametreleri

m_1 (Taşıt gövdesinin kütlesi)	350 kg
m_2 (Tekerlek ve aks kütlesi)	35 kg
c_1 (Süspansiyon sönüm katsayısı)	1000 Ns/m
k_1 (Süspansiyon yay katsayısı)	13000 N/m
k_2 (Tekerlek yay katsayısı)	250000 N/m



Şekil 2. $G_o(s)$ 'nin Kutup-Sıfır Haritası



Şekil 3. $G_{sd}(s)$ 'nin Kutup-Sıfır Haritası

NONLINEER KONTROLCÜ TASARIMI

H_∞ kontrol temeline dayalı kazanç programlamalı (Gain-Scheduling) kontrolcü tasarımında ilk adım kontrol sisteminden beklenen sönüm, doğruluk ve robustluk özellikleri ışığında, ağırlık fonksiyonlarını belirlemek ve genelleştirilmiş sistemi oluşturmaktır. Performans için genelleştirilmiş sisteme konulmuş olan denklem 1 ve 2'deki W_o ve W_{sd} ağırlık fonksiyonları p parametresine bağlı olarak tasarlanmıştır. Burada programlama parametresi olarak süspansiyon sapması kullanılmıştır. p parametresi $p = [0,0.08]$ aralığında değişmektedir. Denklem 3-6'da sırasıyla W_r , W_{act} , W_{n1} ve W_{n2} ağırlık fonksiyonları ve Şekil 4'de ise bu ağırlıklar kullanılarak oluşturulmuş genelleştirilmiş kontrol yapısı verilmektedir.

$$W_a = \frac{20 \cdot 400 \cdot (0.08 - p)}{s + 20} \quad (1)$$

$$W_{sd} = \frac{10 \cdot 3600 \cdot (p)}{s + 10} \quad (2)$$

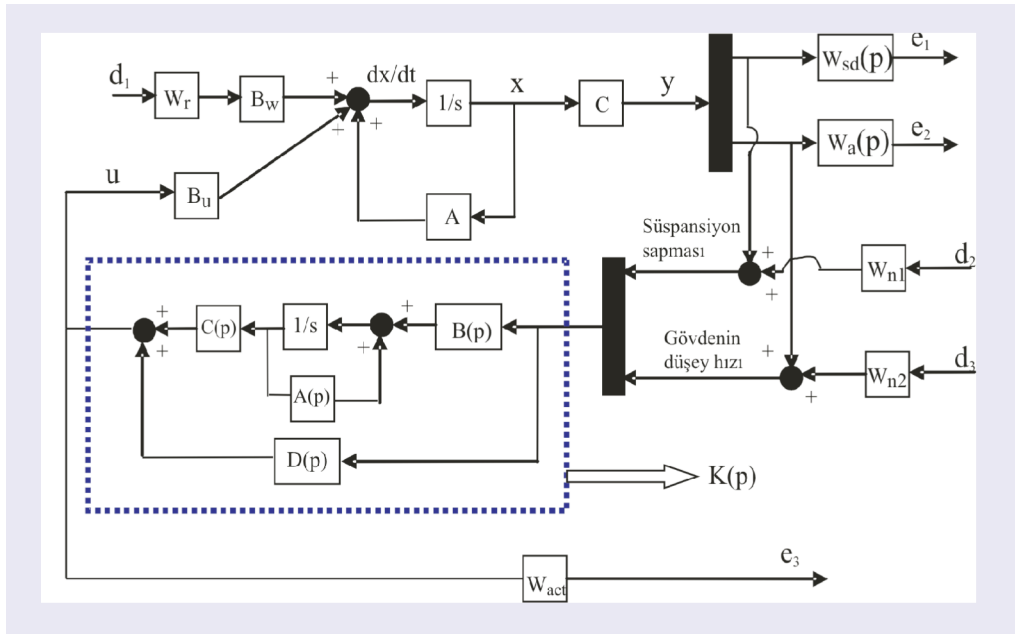
$$W_r = \frac{0.001}{s + 50} \quad (3)$$

$$W_{act} = 0.007 \quad (4)$$

$$W_{n1} = 0.00001 \quad (5)$$

$$W_{n2} = 0.00001 \quad (6)$$

Şekil 4'de A , B_u , B_w , C , matrisleri sırasıyla sistem matrisini, kontrol giriş vektörünü, yol giriş vektörünü ve çıkış



Şekil 4. Genelleştirilmiş Sistem

matrisini göstermektedir. K kontrolcünün durum uzayı gerçektelemesini simgelemektedir. Ek kısmında söz konusu matrisler ve sistem durumları formundaki ifadeleri verilmektedir. e_1 , e_2 , e_3 çıkışları performans için gerekli olan genelleştirilmiş yapıdaki bütün sanal çıkışları temsil etmektedir. d_1 , d_2 , d_3 girişleri ise sırasıyla bozucu yol girişini, süspansiyon sapması ölçüm gürültüsünü ve taşıt gövdesinin düşey hızının ölçüm gürültüsünü göstermektedir. u ve y ise sırasıyla sisteme etkiyen kontrolcü kuvvetini ve geri besleme için gerekli olan sistem çıkışlarını simgelemektedir. Geri besleme olarak süspansiyon sapması ve gövdenin hızı ölçülmüştür.

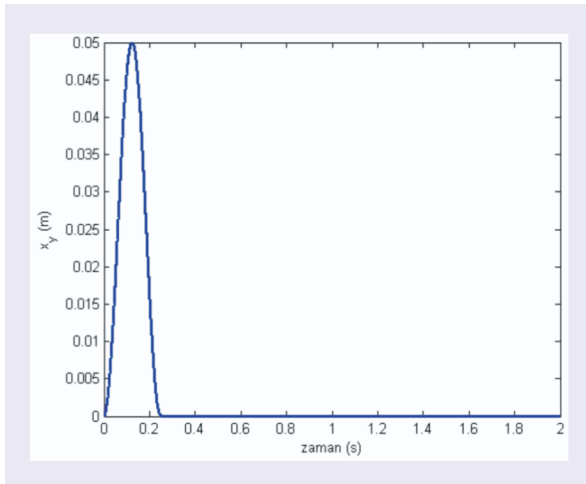
Son adım ise Şekil 4'de verilen genelleştirilmiş sistem için H_∞ kontrol temeline dayalı lineer parametre değişimli kontrolcünün hesaplanması aşamasıdır. Bunun için Matlab bilgisayar programının LMI araç kutusu kullanılmıştır. p parametresine (süspansiyon sapmasına) bağlı olarak bütün girişlerden bütün sanal çıkışlara olan transfer fonksiyonunun H_∞ normunu minimize eden kararlı kılan kontrolcüler ailesi hesaplanmıştır. p parametresine bağlı olarak bulunan bu kontrolcüler ailesinin her iki ucundaki biri ivme odaklı diğeri süspansiyon sapması odaklı olan iki kontrolcü

arasında p parametresine (süspansiyon sapmasına) bağlı olarak lineer enterpolasyon yapılarak non-lineer kontrolcü tasarlanmıştır. Bu süspansiyon sapması $|p| = |x_1 - x_2| = [0, 0.06]$ aralığındayken ivme odaklı kontrolcüye iş verilerek, $|p| = |x_1 - x_2| > 0.08$ aralığındayken süspansiyon sapması odaklı kontrolcüye iş verilerek ve $|p| = |x_1 - x_2| = [0.06, 0.08]$ aralığındayken de söz konusu uçlardaki her iki kontrolcünün uygun biçimde p parametresine bağlı olarak lineer enterpolasyonla gerçekleştirilmiştir.

Simülasyon

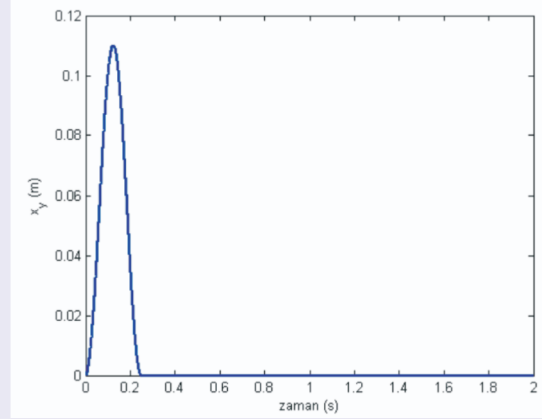
Zaman tanım kümesindeki simülasyonlar iki farklı durum için yapılmıştır. 1. durumda simülasyonlar, Şekil 5'deki gibi bir yol girişi için yapılmıştır. 2. durum ise Şekil 6'da gösterilen yol girişi için yapılmıştır. Bunlar sırasıyla 5 cm ve 11 cm yüksekliğindeki sinüzoidal tümseklerdir. Şekil 1'de verilen çeyrek taşıt modeli için yapılan simülasyonlarda, süspansiyon sapmasının taşıtın yapısal sınırlarını aşmaması için sınırlara yaklaşıldığında süspansiyon yay katsayısının ve sönüm katsayısının ani bir şekilde yüksek oranlarda arttığı kabul edilmiştir [8,9,10].

Referans [10, şekil 11] ve referans [8, şekil 6]'da süspansiyon sapmasının sınırları aştığı durumlarda modelin ivme cevabının 600-800 m/s² mertebelerine kadar çıkabildiği verilmektedir. Bu konuyla ilgili olarak bu makalede çarpışma mekaniğine değinilmemiştir. Şekil 7, 8'de pasif durumdaki modelin sırasıyla şekil 5, 6'daki yol girişlerine karşı taşıtın gövde ivmelenme cevabı kontrolcülü durumla birlikte verilmektedir. 1. yol girişi durumunda süspansiyon sapması taşıtın yapısal sınırlarının uzağında seyretmekte ve non-lineer kontrolcü bütün ilgisini ivmeyi minimize etmeye kaydırmış durumdadır. Aynı şekilde şekil 9, 10'da kontrolcülü ve pasif durumun her iki yol şartı için süspansiyon sapması (x_1-x_2) cevabı sunulmaktadır. Şekil 9'da 1. yol durumu için süspansiyon sapması sınırlara yaklaşmadığı için süspansiyon sapmasının genişliği pasif durumdan daha büyüktür. Şekil 10'da 2. yol girişi için süspansiyon sapması taşıtın ± 8 cm olarak katı bir kısıt koyan sınırlarına yaklaşmıştır ve non-lineer kontrolcü bütün ilgisini süspansiyon sapmasını minimize etmeye kaydırmıştır. Şekil 11, 12'de taşıtın pasif ve kontrolcülü durumları için iki farklı yol şartında yol tutuş performansı (x_2-xy) verilmektedir. Buradan non-lineer kontrolcünün ilgisini süspansiyon sapmasına odakladığı 2. yol girişi

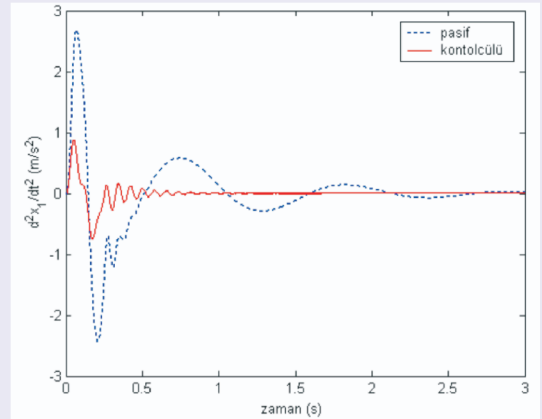


Şekil 5. Birinci Yol Durumu

durumunda, ilgisini ivmeye odakladığı 1. yol girişi durumundan daha kötü yol tutuş performansı sergilemiştir. Şekil 13, 14'de ise her iki yol girişi durumları için kontrolcü kuvveti-zaman grafiği verilmiştir. Aktif süspansiyon sistemi beklendiği gibi kötü yol şartında daha fazla kuvvet gerektirmiştir.

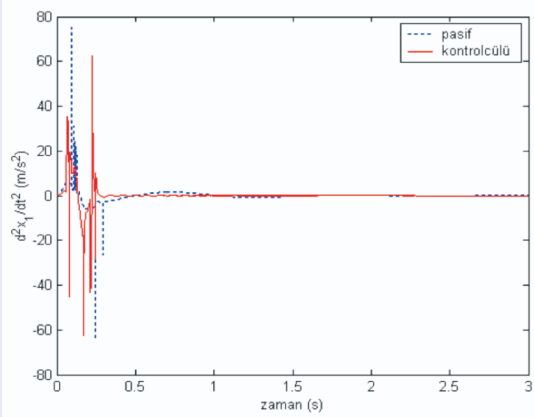


Şekil 6. İkinci Yol Durumu



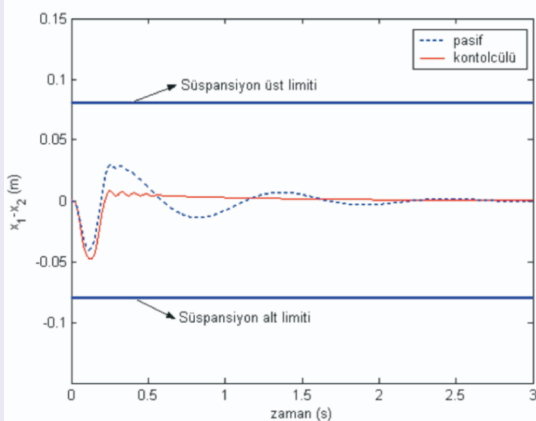
Şekil 7. Birinci Durumdaki İvme Cevabı

Şekil 15-17 kontrolcülü ve pasif durumlar için sırasıyla taşıt gövdesinin düşey ivmelenmesi, süspansiyon sapması ve yol tutuş (tekerlek sapması) performans kriterleri için frekans cevapları verilmiştir. Bu cevaplar p parametresinin 9 farklı değeri için elde edilmiştir. Sistemin açık çevrim cevapları düz çizgiyle gösterilmiştir. p parametresine bağlı olarak sunulan

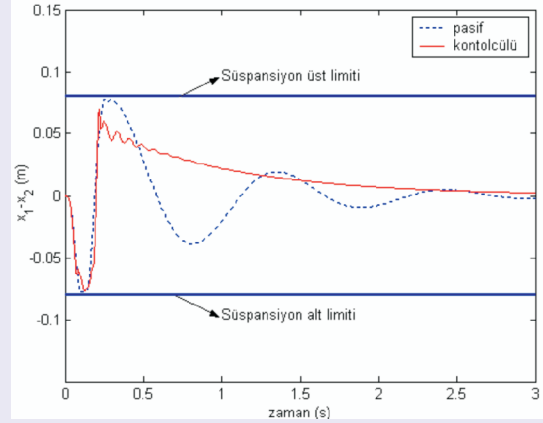


Şekil 8. İkinci Durumdaki İvme Cevabı

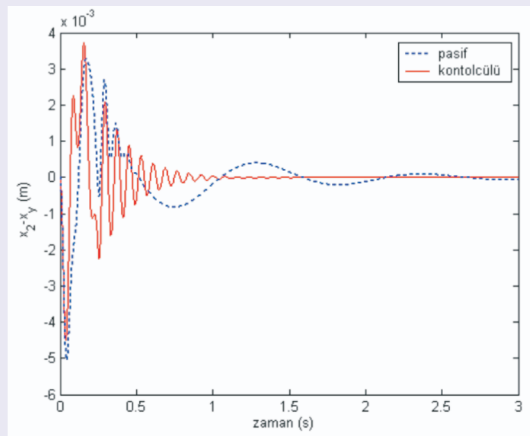
kapalı çevrim frekans cevapları ise kesikli çizgilerle gösterilmektedir. Frekans cevaplarından, p kazanç programlama parametresi 0 dan 0.08 değerine doğru arttıkça non-lineer kontrolcünün karakteri ivme odaklı olmaktan süspansiyon sapması odaklı olmaya doğru değişmekte olduğu açıkça görülmektedir. Yine frekans cevaplarından, bu makalenin ilgisi dışında olmasına karşın yol tutuş performansına ilişkin olarak, non-lineer kontrolcünün p kazanç programlama parametresinin küçük değerlerinde yol tutuş performansı açısından daha iyi sonuçlar verdiği ve p değeri arttıkça yol tutuş performansının kötüleştiği ortaya çıkmıştır.



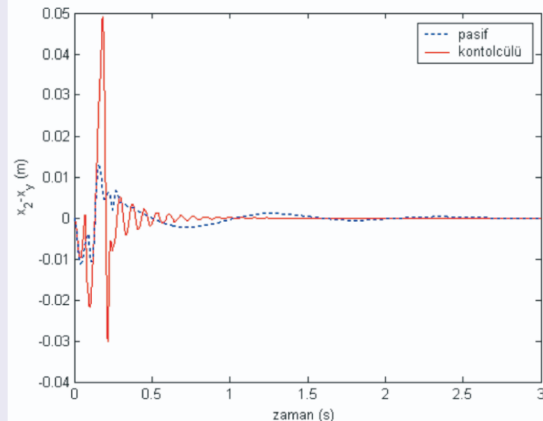
Şekil 9. Birinci Durumdaki Süspansiyon Sapması



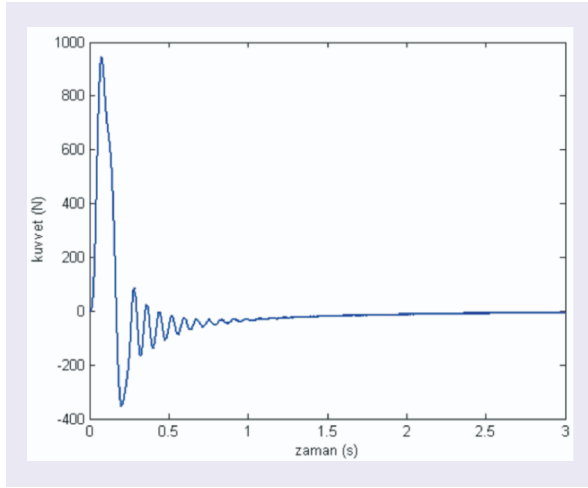
Şekil 10. İkinci Durumdaki Süspansiyon Sapması



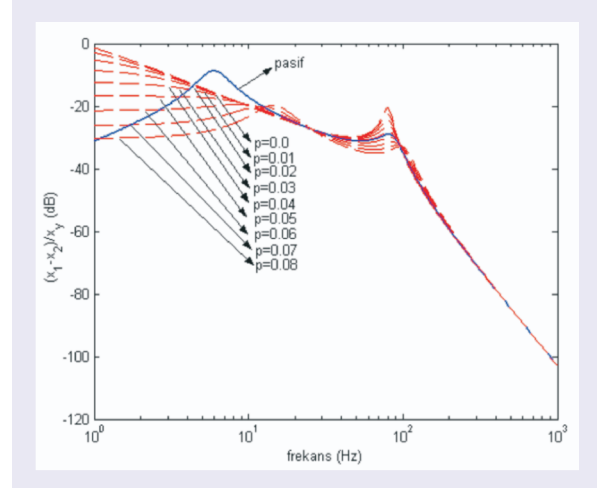
Şekil 11. Birinci Durumdaki Yol Tutuş Cevabı



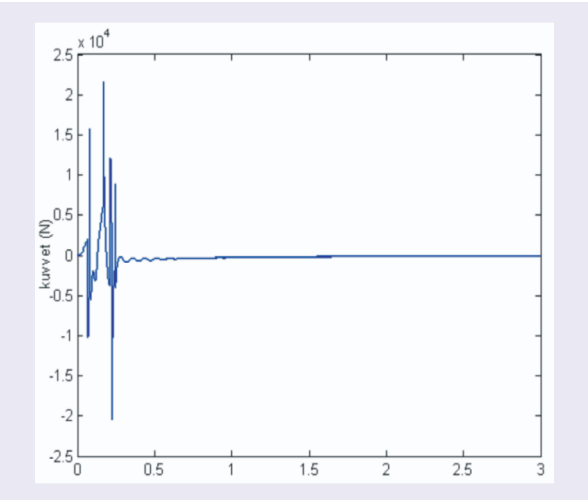
Şekil 12. İkinci Durumdaki Yol Tutuş Cevabı



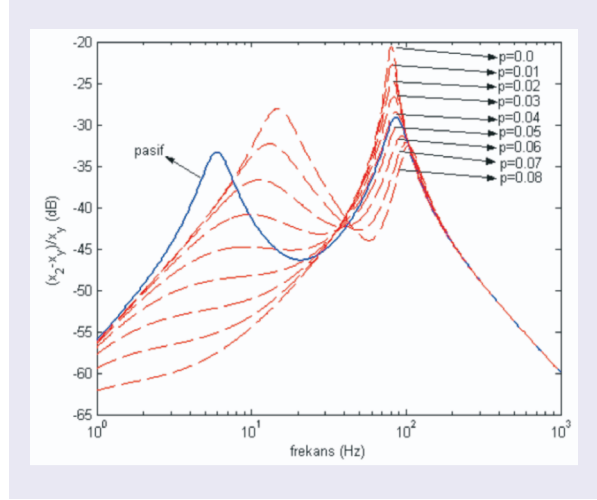
Şekil 13. Birinci Durumdaki Kontrol Kuvveti



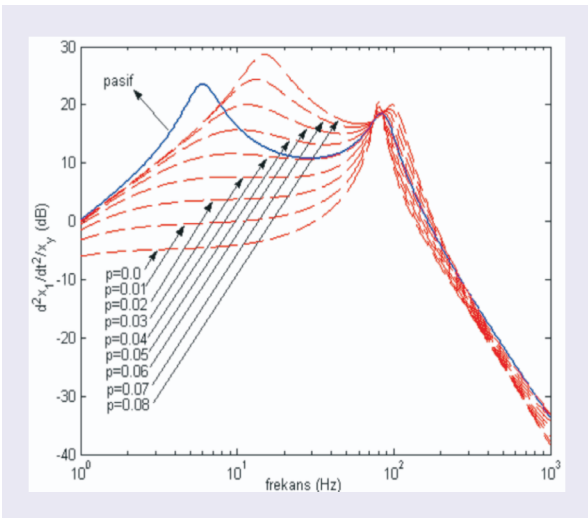
Şekil 16. Süspansiyon Sapması Frekans Cevabı



Şekil 14. İkinci Durumdaki Kontrol Kuvveti



Şekil 17. Yol Tutuş Frekans Cevabı



Şekil 15. İvme Frekans Cevabı

Sonuç

Bu makalede, taşıtlardaki konfor problemine odaklanılıp süspansiyon stroğunun meydana getirdiği katı kısıtlar göz ardı edilmeden performans filtrelerinin kazançlarının süspansiyon parametresine bağlı seçilmesiyle H_∞ kontrol temeline dayalı lineer kazanç değişimli bir kontrolcü tasarlandı. Kontrolcü için süspansiyon sapması ve taşıt gövdesinin hızı geri beslendi. Hem frekans hem de zaman tanım kümesinde performans kriterleri için yapılan simülasyonlardan böyle bir non-lineer kontrolcünün tasarlanmasıyla lineer kontrolcülerden farklı olarak birden fazla performans kriterine odaklanılabileceği ortaya konmuştur. 5 cm

yüksekliğindeki yol şartında süspansiyon sapması taşıtın yapısal sınırlarına yaklaşmadığı için kontrolcü ilgisini tamamen ivmelenmeyi minimize etmeye yönelmiştir. 11 cm yüksekliğindeki yol şartında ise süspansiyon sapması sınırlara ulaştığından bu defa kontrolcü ilgisini süspansiyon sapmasını minimize etmeye yönelmiş ve yapısal sınırlar olan ± 8 cm sınırları içinde tutmaya muvaffak olmuştur. Şekil 13, 14' den anlaşıldığı gibi kontrolcünün süspansiyon sapmasına odaklandığı kötü yol şartında daha fazla kontrolcü kuvveti gerekmiştir. Frekans cevaplarının incelenmesiyle süspansiyon sapmasına odaklı kontrolcüdense, ivme odaklı kontrolcü yol tutuş performansı açısından daha iyi sonuç verdiği görülmektedir. Sonuç olarak böyle bir non-lineer kontrolcü kullanılarak üretilecek bir aktif süspansiyonun süspansiyon sapmasının taşıtın yapısal sınırlarından uzak değerlerdeyken güzel bir şekilde ivmeyi minimize edecektir. Aynı şekilde çok kötü yol şartlarında süspansiyon sapmasını minimize ederek taşıtı muhtemel kırılmalardan ve buna bağlı konfor kayıplarından koruyacaktır.

KAYNAKÇA

1. **Güçlü R., Ateş G. V.**, "Beş Serbestlik Dereceli Taşıtın Titreşimlerinin Aktif Kontrolü", 12. Ulusal Makine Teorisi Sempozyumu Bildiriler Kitabı, Kayseri, 375-383, Haziran 2005
2. **Kuo Y. P., Li T. H. S.**, "GA-Based Fuzzy PI/PID Controller for Automotive Active Suspension System", IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 46, pp. 1051-1056, December 1999
3. **Yağız N., Yüksek İ., Güven H., R.**, "Taşıt Süspansiyon Sistemlerinin Aktif Kontrolünde Kullanılan Metotların Tanıtılması ve Kıyası", Mühendis ve Makine, cilt 40, sayı 477, 39-43, 1997
4. **Onat C., Küçükdemir İ. B., Çetin Ş., Yüksek İ.**, "A Comparison Study of Robust Control Strategies for Automotive Active Suspension Systems (H₂, LQR, Fuzzy Logic Control)", International Symposium on Innovations in Intelligent Systems and Applications, İstanbul-Turkey, 291-294, 15-18 June 2005
5. **Onat C., Sivrioğlu S., Yüksek İ.**, "Taşıt Titreşimlerinin Robust Kontrolü", 12. Ulusal Makine Teorisi Sempozyumu Bildiriler Kitabı, Kayseri, 403-408, Haziran 2005
6. **Onat C., Sivrioğlu S., Yüksek İ.**, "Bir Çeyrek Taşıt Modeli İçin

H_∞ Kontrolcü Tasarımı", Mühendis ve Makine, cilt 46, sayı 545, 40-46, Haziran 2005

7. **Choi, S., B., Lee, H., S., Park, Y., P.**, "H_∞ Control Performance of a Full-Vehicle Suspension Featuring Magnetorheological Dampers", Vehicle System Dynamics, vol. 38, pp. 341-360, 2002
8. **Fialho I. J., Balas G. J.**, "Design of Nonlinear Controllers for Active Vehicle Suspensions Using Parameter-Varying Control Synthesis", Vehicle System Dynamics, 33, 351-370, 2000
9. **Fialho I. J., Balas G. J.**, "Road Adaptive Active Suspension Design Using Linear Parameter-Varying Gain-Scheduling", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol:10, 43-54, 2002
10. **Lin J. S., Kanellakopoulos I.**, "Nonlinear Design of Active Suspensions", 34th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, 45-59, December 11-13 1995
11. **Hedrick J. K., Batsuen T.**, "Invariant Properties of Automotive Suspensions", Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers, 21-27, 1990

Ek

$$m_1 \cdot (d^2x_1 / dt^2) + c_1 \cdot ((dx_1 / dt) - (dx_2 / dt)) + k_1 \cdot (x_1 - x_2) = -u(t)$$

$$m_2 \cdot (d^2x_2 / dt^2) + c_1 \cdot ((dx_2 / dt) - (dx_1 / dt)) + k_1 \cdot (x_2 - x_1) + k_2 \cdot (x_2 - x_y) = u(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1/m_1 & 0 & -c_1/m_1 & c_1/m_1 \\ k_1/m_2 & -k_2/m_2 & c_1/m_2 & -c_1/m_2 \end{bmatrix}$$

$$B_w = [0 \quad -1 \quad 0 \quad 0]^T$$

$$B_u = [0 \quad 0 \quad -1/m_1 \quad 1/m_2]^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = [(x_1 - x_2) \quad (x_2 - x_y) \quad (dx_1 / dt) \quad (dx_2 / dt)]^T$$

$$dx / dt = A \cdot x + B_w \cdot (dx_y / dt) + B_u \cdot u(t)$$

$$y = C \cdot x + D \cdot \begin{bmatrix} dx_y / dt \\ u(t) \end{bmatrix}$$