

TİTREŞİM ANALİZİNDE DİFERANSİYEL QUADRATURE YÖNTEMİ

GİRİŞ

Kapalı matematik çözüm yani analitik çözüm çoğu uygulamalı bilim dalında ve mühendislik problemlerinde ulaşılmak istenen ideal çözümdür. Ancak analitik çözüm, problemlerin çeşitli karakteristikleri nedeniyle çoğu kez imkansız olur. Bu durumda problemin çözümüne ulaşmak için sayısal yaklaşım kurmak zorunludur. Mevcut bu sayısal çözümlerin birbirlerine ve problem tiplerine göre bazı üstünlükleri veya bazı olumsuzlukları olabilir. Yeter doğrulukta çözümler elde etmek için günümüze kadar pek çok sayısal analiz yöntemi önerilmiştir. Genel olarak sayısal yaklaşım yöntemleri zaman veya uzay bölgesinin belirli aralıklara bölünerek çözüme birkaç adımda ulaşmayı veya çoğu durumda ardışık iterasyon çözümlerini gerektirir. Bu nedenle geliştirilen sayısal yöntemler; gerektirdikleri hesaplayıcı ihtiyacı, çözüm için harcanan zaman veya CPU(Merkezi işlem birimi) süresi, denklemlerin stabilitesi, kullanılan düğüm noktası sayısı, problem çözümü için ön işlemler, ve en önemlisi bu çözüm için harcanan para yani ekonomi gibi kıstaslar açısından çeşitli avantajlara veya dezavantajlara sahip olur. Daha hassas sonuçların daha az sayıda düğüm noktası kullanılarak elde edilebilmesi ve böylelikle daha az bilgisayar ihtiyacı, sonuçların daha kısa sürede elde edilebilmesi yani daha ekonomik çözümler elde edilebilme imkanının araştırılması çalışmaları yeni yöntemlerin geliştirilmesine yol açmıştır. Bu metotlar içinde, Richard Bellman tarafından [1] geliştirilen ve ilk defa "Differential Quadrature" terimi ile tanıtılan bu metot herhangi bir sistemin diferansiyel formda elde edilmiş yönetici denklemlerini mevcut sınır/başlangıç koşullarını da denklemlere dahil ederek çözümünü önerir. İlk çalışmasında Bellman [1] önerdiği bu metoda dair çeşitli uygulamaları daha sonra yaptığı çalışmalarında [2] vermiştir. Bu çalışmalarında Bellman; biomekanik, akışkanlar dinamiği ve fiziko-kimya problemlerinde karşılaşılan bazı lineer olmayan adi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünü vermiştir. Metodun literatürdeki yapı mekaniği ve yapı mühendisliği alanındaki ilk uygulaması Bert ve ekibi tarafından giriş ve plakların titreşim hesabıdır [3]. Bununla birlikte Shu ve Richards tarafından ağırlık katsayılarının hesaplanması için Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature (GDQ) metodu adıyla genel bir formülasyonun önerilmesinden sonra 1992 yılından itibaren diferansiyel quadrature metodu ve genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodu ile ilgili çalışmalar büyük bir hız kazanmıştır [4]. Bu tarihten sonra yapı mekaniği ve akışkanlar mekaniği gibi uygulamalı mekanik alanında diferansiyel quadrature metodu ve genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodu kullanılarak yapılmış pek çok çalışma mevcuttur [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15].

Dinamik yükler etkisindeki yapıların analizi ve boyutlandırılması zamana bağlı değişen kuvvetlerin dikkate alınmasını gerektirir. Kuvvetler zamana bağlı olup, yapının karakteristikleri ve davranışı önemlidir. Rüzgar, deprem, darbe, patlama kuvvetleri, endüstriyel yapılarda makina ve motorların oluşturduğu titreşim kuvvetleri, fabrika kreyinlerinde oluşan titreşimlerin yapıya etkileri veya uçak-uzay sanayinde kullanılan gövde ve kanat gibi elemanların maruz olduğu aero-dinamik yüklerin oluşturduğu etkiler örnek olarak verilebilir. Etkiyen kuvvetlerin sabit bir değeri yoktur. Yani yükler zamanın bir fonksiyonu şeklinde ifade edilirler. Kuvvetin zamanla değişmesi nedeni ile yapı kütlelerine etkiyen kuvvetlerde zamanla değişeceğinden yapının davranışının değişmesine neden olacaktır. Mühendislik yapılarının büyük bir çoğunluğu kullanım süreleri boyunca bir veya daha fazla herhangi bir tip dinamik yüklemeye maruz kalırlar. Yapıya etki eden kuvvetler en genel manada; periyodik ve periyodik olmayan kuvvetler veya deterministik ve keyfi (random) kuvvetler olarak dört farklı gruba sınıflandırılabilir. Ayrıca belirtilmelidir ki titreşim hareketi; en genel manada herhangi bir fiziksel sistemin veya

herhangi bir yapının enerji yutma kapasitesinin olup olmamasına göre; sönümlü veya sönümsüz titreşim ve yapıya etki eden bir dış kuvvetin varlığına göre de serbest ve zorlanmış titreşim olarak sınıflandırılır.

DİFERANSİYEL QUADRATURE (DQ) YÖNTEMİ

Diferansiyel quadrature metodu; bir fonksiyonun verilen bir ayrık noktadaki bir uzay değişkenine göre kısmi türevi, o değişken bölgesinin bütün ayrık noktalarındaki fonksiyon değerlerinin ağırlıklı bir lineer toplamı ile ifade edilir, şeklinde tanımlanan düşünceye dayanır. Yeter yaklaşıpta sonuçlar elde etmek için daha az sayıda grid kullanan diferansiyel quadrature metodu; fizik ve mühendislikte karşılaşılan başlangıç değer ve sınır değer problemleri için farklı bir yaklaşım ortaya koymuştur. Bu amaçla tek boyutlu (Şekil 1) bir fonksiyonun birinci türevini ($i=1,2,\dots,N$) noktalarında N ayrık nokta için göz önüne alırsak i .nci ayrık nokta için birinci türev

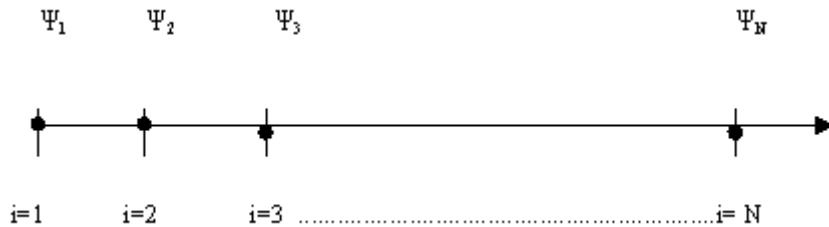
$$\Psi_x(x_i) = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \Psi(x_j); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

olacaktır. Burada x_j değişken bölgesindeki ayrık noktaları, $\Psi(x_j)$ bu noktalarındaki fonksiyon değerlerini, ve A_{ij} birinci dereceden türev için bu değerleri fonksiyon değerlerine bağlayan ağırlık katsayılarını ifade eder. Ağırlık katsayılarının hesabı, karşılık gelen koordinat yönlerinde fonksiyonel yaklaşımlar ile gerçekleştirilir. Test fonksiyonu ya da yaklaşım fonksiyonu olarak bilinen bu fonksiyonların seçiminde süreklilik şartına dikkat edilmelidir. Yaklaşım fonksiyonları, alan değişkenlerinin olası kararlı yani üniform durumlarını tanımlayabilmeli ve diferansiyel denklemden ya da sınır şartlarındaki mevcut en yüksek dereceli diferansiyel kadar türevinin alınabilmesi gerekir. Yani süreklilik şartı için, bir koordinat yönündeki düğüm sayısı, diferansiyel denklemden karşılık gelen bağımsız değişkene göre en yüksek dereceli türevin bir fazlasına eşit olmalıdır. Bellman ve arkadaşları [1,2] ağırlık katsayılarının hesabı için iki farklı yöntem önermişlerdir. Bunlardan birincisinde (1) denklemini tam olarak alındığında, test fonksiyonu olarak (N-1) veya daha küçük dereceden seçilen polinom fonksiyonu için;

$$Y_k(x) = x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

verilen denklem (1)'de yerine yazılırsa aşağıda belirtildiği formda bir lineer denklem takımı verir

$$(k-1)x_i^{k-2} = \sum_{j=1}^N A_{ij} x_j^{k-1} \quad (3)$$



Ancak bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinanı Vandermonde formunda olduğundan tekil bir çözüme sahiptir. Bu tekilliği gidermek için, ağırlık katsayıları, değişik grid nokta sayıları ile (3) denklemini eşit düğüm değerleri için hesaplanmalıdır. Denklem (1) aşağıdaki matris formda da verilebilir.

$$\left\{ \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} \right\}_j = [A_{ij}] \left\{ \Psi(x) \right\}_j \quad (4)$$

Benzer işlemler iki ve daha fazla dereceden türev ifadeleri için de yazılabilir. Böylece, her bir dereceden türev için ağırlık ifadeleri birinci dereceden türev ifadesinden farklı olmaktadır. İkinci dereceden türev için DQ yaklaşımı

$$\psi_{xx}(x_i) = \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N B_{ij} \psi(x_j); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

olarak verilir. Burada B_{ij} ikinci dereceden türev için ağırlık katsayısıdır. Denklem (5) birinci dereceden ağırlık katsayıları cinsinden

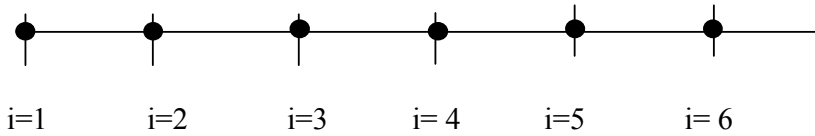
$$\psi_{xx}(x_i) = \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij} \sum_{k=1}^N A_{jk} \psi(x_k); \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

olarak yazılır. Denklem (2) ile verilen polinom fonksiyon uygulanırsa ikinci dereceden türev ifadesi

$$(k-1)(k-2)x_i^{k-3} = \sum_{j=1}^N B_{ij} x_j^{k-1} \quad (7)$$

olmaktadır. Bu denklem yukarıda verilen (3) denkleminde benzer yaklaşımla çözülür. Örnek olarak Şekil 2'de görüldüğü şekilde eşit aralıklı altı nokta ($N=6$) seçelim.

$$x_1=0 \quad x_2=1/5 \quad x_3=2/5 \quad x_4=3/5 \quad x_5=4/5 \quad x_6=1$$



Örnek olarak 6 noktalı eşit aralıklı düğüm nokta dağılımı için birinci mertebeden türev için gerekli ağırlık katsayısı

$$A = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -137 & 300 & -300 & 200 & -75 & 12 \\ -12 & -65 & 120 & -60 & 20 & -3 \\ 3 & -30 & -20 & 60 & -15 & 2 \\ -2 & 15 & -60 & 20 & 30 & -3 \\ 3 & -20 & 60 & -120 & 65 & 12 \\ -12 & 75 & -200 & 300 & -300 & 137 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Daha hassas sonuç elde edilmek istenirse daha büyük sayıda aralığa bölünerek hesap yapılır. İkinci, üçüncü ve dördüncü dereceden ağırlık katsayıları B_{ij} , C_{ij} , D_{ij} , aşağıdaki formda hesaplanır

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} A_{kj} C_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} B_{kj} D_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} C_{kj} \quad (8)$$

Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature (GDQ)

Yukarıda temel prensipleri verilen DQ yaklaşımında ağırlık katsayılarının hesaplanmasında çeşitli güçlükler ortaya çıkmaktadır. Birinci yöntemde elde edilen denklemin katsayılar matrisi Vandermonde sistemi olduğundan determinantının hesabında güçlük çıkar ve denklemin çözümü tekindir. Özellikle grid sayısı arttıkça sonuçların hassasiyeti azalabilmektedir. N grid sayısı 20 den büyük olduğu durumlarda sonuçların güvenilirliği azalmaktadır. Bunlara ilaveten, her bir işlem adımında NXN denklem takımını çözme zorunluluğu vardır. İkinci yaklaşımda ise farklı sınır şartları ve geometri için metodun uygulanabilirliği azalmaktadır. Yani; gerek, daha az sayıda grid noktası seçilerek her işlem adımında bir lineer denklem takımı çözmeyi gerektiren birinci yöntemde gerekse de düğüm noktalarının dağılımını kısıtlayan Legendre yaklaşımında metodun uygulanabilirliği açısından çeşitli güçlükler vardır. Dolayısıyla; hem bu güçlükleri gidermek açısından hem de metodun kullanım alanı ve uygulanabilirliğini kolaylaştırmaya yönelik çabalar sonucunda iki ayrı grup tarafından bağımsız olarak metod geliştirilerek ağırlık katsayılarının hesabı farklı grid noktaları ve yüksek dereceden türevler için uygun bir formda elde edilebilmiş ve genelleştirilmiş diferansiyel quadrature metodu ortaya çıkmıştır. Bu yöntemde sonsuz sayıda düğüm noktası kullanılabilir. Shu ve Richards ağırlık katsayıları için herhangi bir tekilliğe neden olmayan ve büyük sayıda lineer denklem takımı çözümü gerektirmeyen analitik ifadeler önermişlerdir. Bu metotta birinci ve ikinci dereceden türevler için [4];

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j) M^{(1)}(x_j)}; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_x, \quad j \neq i \quad (9)$$

$$B_{ij}^{(1)} = \frac{P^{(1)}(y_i)}{(y_i - y_j) P^{(1)}(y_j)}; \quad i, j = 1, 2, \dots, N_y, \quad j \neq i \quad (10)$$

Burada

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^{N_x} (x_i - x_j), \quad P^{(1)}(y_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^{N_y} (y_i - y_j)$$

ve

$$A_{ij}^{(r)} = r \left[A_{ii}^{(r-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(r-1)}}{x_i - x_j} \right]; \quad i, j =$$

1, 2, ..., N_x , $j \neq i$; ve $r = 2, 3, \dots, N_x - 1$ için (11)

$$B_{ij}^{(s)} = s \left[B_{ii}^{(s-1)} B_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(s-1)}}{y_i - y_j} \right]; \quad i, j =$$

1, 2, ..., N_y, j¹i; ve s = 2, 3, ..., N_y-1 için (12)

$$A_{ii}^{(r)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_x} A_{ij}^{(r)}; \quad i=1, 2, \dots, N_x \quad \text{ve} \quad r=1, 2, \dots, N_x-1 \quad (13)$$

$$B_{ii}^{(s)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_y} B_{ij}^{(s)}; \quad i=1, 2, \dots, N_y \quad \text{ve} \quad r=1, 2, \dots, N_y-1 \quad (14)$$

Harmonik Diferansiyel Quadrature (HDQ)

Harmonik diferansiyel quadrature yönteminde ağırlık katsayılarının hesaplanması için önerilen test fonksiyonu trigonometrik ya da harmonik formda olduğundan metot harmonik diferansiyel quadrature olarak önerilmiştir [26]. Bu fonksiyon

$$u_k(x) = [1, \sin(d), \cos(d), \dots, \sin \frac{N-1}{2}(d), \cos \frac{N-1}{2}(d)] \quad (15)$$

olarak verilmektedir. Burada d= px. Bu yöntemde birinci ve ikinci mertebeden ağırlık katsayıları ;

$$A_{ij} = \frac{(d/x)P(x_i)}{2P(x_j) \sin \left[\frac{x_i - x_j}{2} \right] (d/x)} \quad j \neq i \quad (16)$$

şeklindedir. Denklemden

$$P(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N \sin \left(\frac{x_i - x_j}{2} \right) \quad j=1, 2, \dots, N$$

olarak tanımlıdır. Eğer j =i için birinci mertebeden ağırlık katsayısı hesaplanacak olursa ifade şeklinde olur.

$$A_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} \quad j=1, 2, \dots, N \quad \text{için} \quad (17)$$

Benzer olarak ikinci mertebeden ağırlık katsayıları [27];

$$B_{ij} = A_{ij} \left[2 A_{ii} - \frac{d}{x} \operatorname{ctg} \frac{x_i - x_j}{2} \left(\frac{d}{x} \right) \right] \quad j \neq i \quad \text{ve} \quad B_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N B_{ij} \quad j \neq i \quad (18, 19)$$

Düğüm Nokta Tipi ve Seçimi

Diferansiyel quadrature metodunda çözümün hassasiyeti bazı problem türlerinde sınır koşullarına bağlı olsa da genelde bu hassasiyet düğüm noktalarının seçimine ve sayısına bağlıdır. Daha önce yapılan çalışmalarda gösterilmiştir ki; lineer türden denklemler ve homojen sınır koşullarına sahip problemlerde eşit aralıklı seçilen düğüm noktaları çözüm hassasiyeti açısından yeterlidir. Bununla birlikte titreşim problemlerinde daha çok bir diğer tür (Chebyshev-Gauss-Lobatto) grid nokta seçiminin daha uygun olduğu gösterilmiştir. Zamana bağlı denklemlerde ve başlangıç değer problemlerinde ise eşit aralıklı olmayan türden düğüm nokta seçimi en uygun çözümleri türetmiştir. Sonuç olarak, her tür problem için en etkili seçimin bilinmesi analiz süresini kısaltacaktır. Düğüm noktalarının seçiminde sıkça kullanılan ve önerilen eşit aralıklı ve eşit olmayan aralıklı Chebyshev-Gauss-Lobatto grid dağılımları çalışma kapsamında kullanılacaktır. Her iki doğrultuda yani her bir koordinat yönünde (tek boyutlu problemler için bir yönde) eşit aralıklı seçilen [4, 16, 17, 18, 19, 20];

$$x_i = \frac{i-1}{N_x-1}, \quad y_j = \frac{j-1}{N_y-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N_x; \quad j = 1, 2, \dots, N_y \quad (20)$$

düğüm noktaları tanımlanır. Bazı durumlarda eşit aralıklı olmayan noktaların daha iyi sonuç verdiği bilinmektedir. İki boyutlu problemler için eşit olmayan grid noktaları Chebyshev-Gauss-Lobatto noktaları için ilgili bağıntılar şu şekildedir:

$$x_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{i-1}{N_x-1} \pi \right) \right]; \quad y_j = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{j-1}{N_y-1} \pi \right) \right] \quad (21)$$

SAYISAL UYGULAMALAR

Dikdörtgen Plak : İnce elastik dikdörtgen bir plağın serbest titreşimine ait yönetici denklem boyutsuz formda

$$\frac{\partial^4 F}{\partial X^4} + 2k^2 \frac{\partial^4 F}{\partial X^2 \partial Y^2} + k^4 \frac{\partial^4 F}{\partial Y^4} = \Omega^2 F \quad (25)$$

olarak tanımlıdır. Burada F titreşimin boyutsuz mod fonksiyonu, W boyutsuz frekans olup, ile verilir, $X = x/a$ ve $Y = y/b$ boyutsuz koordinatlar, a ve b plağın x ve y doğrultusundaki boyutları, $k = a/b$ plak kenarlarının oranı, h plak kalınlığı, r , malzeme yoğunluğu, ve D plak eğilme rijitliği olup $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ şeklinde tanımlıdır. Metodun uygulanmasıyla

$$\sum_{k=1}^{N_x} D_{ik} F_{kj} + 2k^2 \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{m=1}^{N_y} B_{ik} B_{jm} F_{km} + k^4 \sum_{k=1}^{N_y} D_{jk} F_{ik} = \Omega^2 F_{ij} \quad (26)$$

denklemini elde edilir. Sınır koşullarının çözüme dahil edilmesi ile serbest titreşim problemi

$$\begin{bmatrix} [S_{bb}] & [S_{bd}] \\ [S_{db}] & [S_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_b \\ F_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \Omega^2 \{F_d\} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

şeklinde tanımlanır. Bazı düzenlemeler ve matris işlemlerinden sonra denklem

$$([S] - \Omega^2 [I]) \{F_d\} = 0 \quad (28)$$

halini alır. Burada $[S] = [S_{dd}] - [S_{db}][S_{bb}]^{-1}[S_{bd}]$ ve b ile d alt indisleri sınır koşulları ve yönetici denklemlerindeki diferansiyel quadrature analoglarında kullanılan düğüm noktalarını belirtir ve toplam denklemdaki katkısını gösterir. Elde edilen temel frekans değerleri plak kenar boyutlarının oranı $k = a/b$ için Tablo 1'de verilmiştir. Bu tabloda AAAA, dörtkenarın ankastre, BBBB basit, SSSS ise serbest olarak oturduğunu gösterir. Tablodan görüleceği üzere Leissa [23] tarafından verilen sonuçlar dikkate alınınca her iki yönde 9 adet düğüm noktası kullanılarak yeter doğrulukta sonuçlar elde edilmiştir.

Elastik Kirişler : Lineer elastik bir kirişin eğilmeli durum için serbest titreşim denklemi

$$\frac{d^2}{dx^2}(EI \frac{d^2 y}{dx^2}) + \rho A \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad (29)$$

olarak bilinir. Burada ρA kütle, t zaman parametresidir. Denklem tabii frekans değeri

$$\Omega^2 = \frac{\rho A_0 L^4 \omega^2}{EI_0} \text{ için boyutsuzlaştırılıp DQ metodu uygulanarak;}$$

$$\sum_{j=1}^N D_{ij} Y_j = -\Omega^2 Y_i \quad ; i=3,4,\dots,(N-2) \quad (30)$$

Bu denklem farklı mesnet durumları için gerekli sınır koşulları altında çözümlerse plakların çözümündeki (28) denklemine benzer olarak bir özdeğer problemi elde edilir. Bu denklemin temel frekans değeri için çözümünden çeşitli düğüm değerleri için Tablo 2 'de üç farklı mesnet durumu için elde edilmiştir. Tabloda karşılaştırmalı olarak hem HDQ ve hem de GDQ ile birlikte kesin sonuçlar verilmiştir. Bu tabloda A ankastre, B basit mesneti göstermektedir. Tablo 2'den görüleceği üzere HDQ yöntemi ile 7 düğüm noktası ile kesin değerler ile örtüşen sonuçlar hesaplanmıştır. DQ yönteminde 7 düğüm noktası için sonuçlar yeter hassasiyette değildir. Düğüm nokta sayısı 9 alınınca DQ yöntemi için sonuçlar yeterli bulunmuştur. Eksenel titreşim durumunda hareket denklemi

$$(EA \frac{d^2 y}{dx^2}) - \rho A \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad (31)$$

şeklinde dir. Bu denklem için gerekli olan diferansiyel quadrature formu 30 denklemine benzer yazılır. Elde edilen sonuçlar iki farklı mesnet durumu için Tablo 3'de verilmiştir.

Dairesel plak: Sabit kalınlıklı ince daire sel plağın serbest titreşim denklemi

$$\frac{\partial^4 u}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\rho h}{D} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (32)$$

olarak verilir. Kabul edelim ki u deplasman fonksiyonu

$$u(r,t) = U(R) e^{i\omega t} \quad (33)$$

formunda olsun. Böylece (33) denklemini (32) de yazılarak

$$\frac{\partial^4 U}{\partial R^4} + \frac{2}{R} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial R^3} \right) - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} \right) + \frac{1}{R^3} \left(\frac{\partial U}{\partial R} \right) - \Omega^2 U = 0 \quad (34)$$

boyutsuz titreşim denklemini elde edilir. Burada $R = r/a$, a plağın dış yarıçapı, h kalınlık, D eğilme rijitliği, ve W boyutsuz frekans değeri olup şeklinde tanımlanır. Elde edilen ilk üç frekans değeri Tablo 4'de karşılaştırmalı olarak verilmiştir. HDQ yöntemi ile hesaplanan değerler 11 düğüm noktası kullanılıncaya Blevins [29] tarafından verilen kesin değerlere çok yakındır. GDQ yönteminde 9 düğüm için hesaplanan sonuçlar iki ve üçüncü frekans değerleri için uygun değildir.

Elastik zemine oturan kirişler : Elastik zemine oturan ünüform bir kirişin hareket denklemini

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + \rho A \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0 \quad (35)$$

şeklindedir. Bu denkleme metodun uygulanması ile

$$\sum_{j=1}^N D_{ij} Y_j + k Y_i = -\rho A \Omega^2 Y_i \quad (36)$$

olarak verilen bir özdeğer problemi elde edilir. $E = 1$, $A = 1$, $r = 1$, $k = 1$ ve $L = 1$ boyutsuz değerleri ve elastik zemine oturmuş basit mesnetli bir kiriş için elde edilen ilk üç frekans değeri Tablo 5'de kesin değerler ile birlikte verilmiştir. Tablodan görüleceği üzere GDQ ve HDQ yöntemleri 9 düğüm noktası için uygun olmakta, ancak DQ yönteminde yeter doğrulukta sonuçlar 11 düğüm noktası için hesaplanmaktadır. Diğer örneklerde olduğu gibi, HDQ daha az düğüm noktası ile daha hassas sonuçlar vermiştir.

Tablo 1. Dikdörtgen plak için farklı kenar boyutlarına bağlı Boyutsuz temel frekans ($\Omega = \omega^2 a^4 \rho h / D$; $\nu = 0.3$; $N_x = N_y = 9$)

k = a/b	BBBB		AAAA		SSSS	
	HDQ	(Leissa, 1969)	HDQ	(Leissa, 1969)	HDQ	(Leissa 1969)
2/5	11.466	11.449	23.541	23.648	3.558	3.463
2/3	14.290	14.256	27.796	27.010	8.954	8.946
1	19.608	19.739	35.811	35.992	13.903	13.489
3/2	32.052	32.076	61.120	60.772	20.109	20.128
5/2	71.210	71.555	147.44	147.80	21.577	21.643

Tablo 2. Elastik kirişin eğilmeli titreşim durumunda boyutsuz temel frekans değerleri ($\Omega_i^2 = \rho A \omega_i^2 l^4 / EI$)

Mesnet Koşulları	Temel frekans değeri (1. Frekans) Ω_1					
	Kesin (Paz,1997)	DQ (N=9)	GDQ (N=5)	HDQ (N=7)	DQ (N=7)	GDQ (N=7)
B-B	3.142	3.142	3.140	3.142	3.138	3.142
A-B	3.927	3.926	3.930	3.927	3.920	3.927
A-A	4.730	4.730	4.732	4.730	4.737	4.728

Tablo 3. Eksenel titreşim durumunda kiriş için boyutsuz ilk üç frekans değeri ($\Omega_i^2 = \rho A \omega_i^2 / EA$)

	A-S		S-S	
	HDQ (N=9)	Kesin Değer (Blevins, 1984)	HDQ (N=9)	Kesin Değer (Blevins, 1984)
Ω_1	3.1415	3.1416	1.5740	1.5708
Ω_2	6.2832	6.2832	4.7102	4.7124
Ω_3	9.4260	9.4248	7.8489	7.8539

Tablo 4. Kenarlarından ankastre bağlı dairesel plağın bir ilk üç frekans değeri

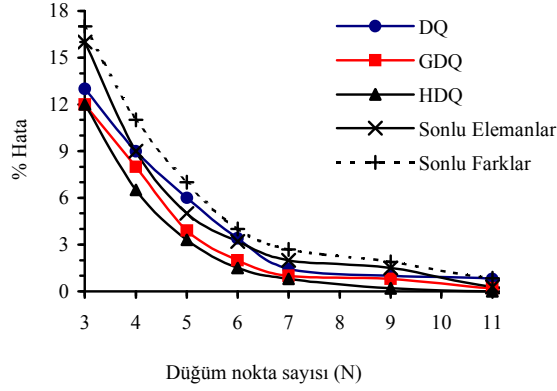
$$(\Omega_i^2 = \rho h \omega_i^2 a^4 / D)$$

	(Leissa,1969)	GDQ (N=9)	Kesin (Blevins,1984)	HDQ (N=11)
	Ω_1	10.22	10.20	10.22
Ω_2	-	44.68	39.77	39.77
Ω_3	-	80.24	89.10	89.11

Tablo 5. Elastik zemine oturan basit mesnetli ünüform kiriş için ilk üç frekans değeri

	DQ (N=11)	GDQ (N=9)	HDQ (N=9)	Kesin Çözüm (Chen, 2000)
	Ω_1	0.098751	0.099584	0.099254
Ω_2	0.003887	0.040141	0.040001	0.003949
Ω_3	0.087746	0.087995	0.008875	0.008883

Bölüm 3.1'de çözülen BBBB mesnetli kare plak (k=1) titreşim probleminde DQ yöntemlerinin ve özellikle HDQ yönteminin diğer yöntemlere göre üstünlüklerini vurgulamak açısından Tablo 1'de verilen sonuçlar sonlu elemanlar ve sonlu farklar metodu kullanılarak da hesaplanmıştır. Elde edilen hata değerleri düğüm noktasına bağlı olarak Şekil 3'de verilmiştir.



Şekil 3. Çeşitli yöntemler için düğüm nokta sayısına bağlı hata değerleri

Şekil 3'den görüleceği üzere kullanılan bütün metotlar için düğüm nokta sayısı arttıkça hata değerleri azalmaktadır. En büyük hata değeri sonlu farklar, en küçük hata değerleri ise harmonik diferansiyel quadrature(HDQ) için elde edilmiştir. Hata değeri; her iki yönde $N_x = N_y = N = 9$ düğüm nokta kullanılarak elde edilen sonuçlar Leissa [23] tarafından verilen değerler referans alınmak üzere HDQ için %0.02, GDQ için %1, DQ için %1.7, Sonlu elemanlar için %1.78 ve sonlu farklar [24] için %2.7 olarak hesaplanmıştır. $N = 6$ için ise en uygun sonuç %1.85 hata değeri ile HDQ için hesaplanmıştır. Bu hata değeri sonlu elemanlarda $N = 8$, sonlu farklar yönteminde $N = 10$ için bulunmuştur. Sonuç olarak denilebilir ki daha az düğüm sayısı kullanılması daha az bilgisayar kapasitesi ve hesap süresi demek olup, bu örnek için HDQ ile $N = 6$ için 1 sn 'den daha az sürede hassas sonuçlar elde edilmiştir. Bu hassasiyete sahip sonuçlar sonlu elemanlarda $N = 8$ için hesaplanmış olup hesap süresi yaklaşık 2 sn ve sonlu farklarda $N = 10$ için hesap süresi yaklaşık 3.2 sn dir. Hesaplar, Pentium-II işlemci ve 128 RAM belleğe sahip kişisel bilgisayarda yapılmıştır. Ancak unutulmamalıdır ki daha büyük çaplı problemlerde daha fazla düğüm nokta sayısı kullanılınca hesap süresi bakımından avantaj daha belirgin olacaktır. Şunu da belirtmek gerekir ki: DQ yöntemleri ve özellikle HDQ yöntemi pek çok problemde pek çok araştırmacı tarafından vurgulandığı üzere sonlu farklardan çok üstündür [3, 4, 5, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 25]. Bu üstünlük çok daha az düğüm nokta sayısı ve bu nedenle daha az bilgisayar hesap süresi bakımındandır. Ancak metodun sonlu elemanlardan her zaman üstün olduğunu söylemek yanlış olur. Özellikle karmaşık malzeme davranışı ve kırılma mekaniği gibi hareketli sınır koşullarına sahip problemlerde sonlu elemanlar ve sınır elemanlar yöntemleri üstünlüğünü korumaktadır. DQ yöntemlerinde test fonksiyonu ya da yaklaşım fonksiyonu olarak bilinen fonksiyonların seçiminde süreklilik şartına dikkat edilmelidir. Benzer zorunluluk sonlu elemanlar yöntemindeki enterpolasyon fonksiyonlarının seçiminde de vardır. Ancak DQ metodunda, seçilen fonksiyonlarının Ritz metodunda olduğu gibi çözümün başlangıcında sınır şartlarını sağlaması zorunluluğu yoktur. Lineer olmayan davranışa sahip sönümlü veya sönümsüz dinamik problemlerde [5] HDQ yöntemi ile hesaplanan değerler; sonlu farklar, Newmark-b, Trapez ve Wilson-q yöntemlerinden daha hassas olup çok daha az düğüm noktası kullanılmıştır. Ancak yaklaşık 60 yıllık bir geçmişi olan sonlu elemanlar metodu da malzeme özelliklerinin lineer olmadığı dinamik problemlerde hesap ve yaklaşım üstünlüğünü korumaktadır. Hesaplamalı mekanik alanında 14 yıllık bir geçmişi olan DQ yöntemleri ile ilgili yeni teori ve yaklaşımların geliştirilmesi ile yöntemin pek çok problemde kullanılabilir esnek yaklaşımı ve pratik uygulaması öne çıkacaktır.

SONUÇ

Diferansiyel quadrature metotları son yılların ilgi çeken bir sayısal analiz yöntemidir. Bu yazıda üç farklı DQ metodu girişlerin ve plakların serbest titreşim hesabına uygulanmıştır. HDQ metodu daha az düğüm nokta sayısı ile daha hassas sonuçlar vermektedir. DQ

metodu ise daha doğru sonuçlar için daha fazla sayıda düğüm noktasına ihtiyaç duymakta, ancak daha çok düğüm sayısı kullanılıncaya hesap süresi artmaktadır. GDQ metodu ağırlık katsayılarının hesabının daha basit oluşu ve üniform ya da üniform olmayan düğüm dağılımı için uygun olması bir avantajdır. Sonuçların yaklaşıklığı, gerektirdiği hesaplayıcı kapasitesi ve uygulama alanının çeşitliliği dikkate alınınca DQ metodlarının ve özellikle HDQ metodunun yapıların dinamik analizinde kullanılacak etkili bir metod olacağı söylenebilir [5, 6, 7, 12, 26, 27]. Bu yazı, yazarın kendi makalelerinden ve diğer araştırmacıların yazılarından derlenmiş ve son yıllarda popüler olan bu metodun Ülkemizdeki araştırmacılara duyurulması amaçlanmıştır.

TEŞEKKÜR

Yazar; Diferansiyel quadrature metodlarıyla ilgili bazı önemli belge ve makaleleri sağlayan Oklahoma Üniversitesi Profesörlerinden Sayın C.W.Bert' e ve yakın ilgisi nedeniyle aynı üniversitede görevli Assoc. Prof. Dr. M.Cengiz ALTAN'a sayısal hesaplar için gerekli programlar sırasında yardımlarını esirgemeyen İnş.Müh. A.K.BALTACIOĞLU'na teşekkür eder.

KAYNAKÇA

1. Bellman, R., Casti, J., Differential Quadrature And Long-Term Integration., Journal of Mathematical Analysis And Applications, 34, 235-238,1971.
2. Bellman, R., Kashef, B.G., Casti, J., Differential Quadrature : A Technique For The Rapid Solution Of Nonlinear Partial Differential Equation., Journal Of Computational Physics, 10, 40-52,1972.
3. Bert CW, Jang SK, Striz AG. Two New Approximate Methods For Analyzing Free Vibration of Structural Components. AIAA Journal 1987; 26 (5): 612-18.
4. Shu, C., Richards, B. E., Application of Generalized Differential Quadrature To Solve Two- Dimensional Incompressible Navier -Stokes Equations, International Journal For Numerical Methods In Fluids, 15, 791-798, 1992.
5. Civalek, Ö., Çok Serbestlik Dereceli Sistemlerin Harmonik Diferansiyel Quadrature (HDQ) Metodu ile Lineer ve Lineer Olmayan Dinamik Analizi, Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, 2003.
6. Civalek, Ö., Application of Differential Quadrature (DQ) and Harmonic Differential Quadrature (HDQ) for Buckling Analysis of Thin Isotropic Plates and Elastic Columns, Engineering Structures, An International Journal, 26(2), 171-186,2004.
7. Civalek, Ö., Ülker, M., Harmonic Differential Quadrature (HDQ) For Axisymmetric Bending Analysis Of Thin Isotropic Circular Plates, International Journal of Structural Engineering and Mechanics, Vol. 17(1), 1-14, 2004.
8. Civalek, Ö., Çatal, H.H., Generalized Differential Quadrature (GDQ) Approach For Linear And Nonlinear Dynamic Response Of Single-Degree-of-Freedom (SDOF) Systems, Engineering Structures,(Hakem değerlendirmesinde), 2003.
9. Civalek, Ö., Ülker, M., Free Vibration Analysis Of Elastic Beams Using Harmonic Differential Quadrature (HDQ), Mathematical and Computational applications, Vol. 9(2), 257-264, 2004.
10. Civalek, Ö., Çatal, H.H., Plakların Diferansiyel Quadrature Metodu ile Stabilite ve Titreşim Analizi, IMO Teknik Dergi, 2003; Vol. 14 (1), 2835-2852.
11. Civalek, Ö., Çatal, H.H., Dikdörtgen ve Kare Plakların Diferansiyel Quadrature Metodu ile Statik Hesabı., Dokuz Eylül Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi,2003(Baskıda).
12. Civalek, Ö., Çatal, H.H., Linear Static And Vibration Analysis Of Circular And Annular Plates By The Harmonic Differential Quadrature (HDQ) Method, Osmangazi Üniversitesi, Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi Dergisi,Vol.16(1),45-76, 2003.
13. Bert CW, Malik M. Differential quadrature method in computational mechanics: a review. Applied Mechanics Review 1996;49(1):1-28.
14. Bert CW, Wang Z, Striz AG. Static and Free Vibrational Analysis of Beams and Plates by Differential Quadrature Method. Acta Mechanica 1994;102:11-24.
15. Du H, Lim MK, Lin, RM. Application of Generalized Differential Quadrature Method to Structural Problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering 1994; 37:1881-96.
16. Civalek, Ö., Çatal, H.H., Stress Analysis Of Circular Plates By The Harmonic Differential Quadrature (HDQ) Method, Selçuk Üniversitesi,

Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi Dergisi (Yayına Kabul edildi), 2003.

17. **Civalek, Ö.**, Diferansiyel Quadrature Metodu İle Elastik Çubukların Statik, Dinamik Ve Burkulma Analizi, XVI Mühendislik Teknik Kongresi, Kasım, ODTU, Ankara,2001.

18. **Civalek, Ö., Çatal, H.H.**, Diferansiyel Quadrature Yöntemleriyle Yapıların Karşılaştırmalı Dinamik Analizi, Beşinci Ulusal Deprem Mühendisliği Konferansı, 26-30 Mayıs 2003, Bildiri no : AT-033, İ.T.Ü., İstanbul.

19. **Civalek, Ö., Çatal, H.H.**, Bir ve İki boyutlu yapıların geliştirilmiş diferansiyel quadrature yöntemiyle dinamik analizi, Türkiye İnşaat Mühendisleri Odası, Mühendislik Haberleri, Sayı 417, s.39-46,2002.

20. **Civalek, Ö., Çatal, H.H.**, Stability and Vibration Analysis Of Plates By Differential Quadrature Method, Turkish Chamber of Civil Engineerings, Digest, 14, December,2003.

21. **Civalek, Ö.**, Three Different Type Differential Quadrature Methods (DQM) For Linear Buckling Analysis Of Uniform Elastic Columns, Technical Journal of Yıldız Technique University, 4,51-59, 2003.

22. **Civalek, Ö., Çatal, S.** Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Metodu İle Bazı Sınır Değer Problemlerinin Sayısal Çözümü Üzerine, Dokuz Eylül Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi,2004(Baskıda).

23. Leissa AW. Vibration of Plates, NASA, SP-160, 1969.

24. **Ugural AC.** Stress in plates and shells. Second Edition, McGraw Hill Companies, 1999.

25. **Chen, C.N.**, Vibration of prismatic beam on an elastic foundation by the differential quadrature element method, Computers and Structures, 2000,77, 1-9.

26. **Shu C, Xue H.**, Explicit computations of weighting coefficients in the harmonic differential quadrature, Journal of Sound and Vibration 1997; 204(3): 549-55.

27. **Striz AG, Wang X, and Bert C.W.**, Harmonic Differential Quadrature Method and Applications to Analysis of Structural Components, Acta Mechanica 1995;111:85-94.

28. **Paz, M.**, Structural Dynamics, Theory and Computation, Champman & Hall,1997.

29. **Blevins, R.D.**, Formulas For Natural Frequency And Mode Shapes, Malabar, Florida: R.E.Krieger,1984.